

2024 年度 横浜国立大学 理工学部 数理科学 EP 卒業研究

Link の braid index と HOMFLY 多項式の関係

2164294 渡部 翼

指導教員：野崎 雄太 講師

(2025 年 1 月 30 日)

目次

1	導入	3
2	Link と Braid	4
2.1	Knots, links	4
2.2	Braid	9
2.3	Braid の閉包	13
3	HOMFLY 多項式とその次数に関する不等式	16
3.1	HOMFLY 多項式	16
3.2	Invariant computation tree	19
3.3	証明の準備	21
3.4	主定理とその証明	31
付録 A	命題 3.5 の証明	35

1 導入

結び目理論とは、空間内の閉じた曲線 (結び目) の形状や性質を研究するトポロジーの一分野であり、数学のみならず物理学や化学、その他多くの様々な分野に応用される重要な学問領域である。結び目理論における最も重要な概念の 1 つに結び目不変量がある。結び目不変量とは、連続的に変形し合える結び目同士で変わらない量であり、異なる結び目を区別する際に強力な手段となる。有名な結び目不変量に Alexander 多項式や Jones 多項式, HOMFLY 多項式などの多項式不変量や Arf 不変量, Vassiliev 不変量などがある。

トポロジーの研究対象には, braid と呼ばれるものがある。Braid とは, 図 1 のように有限本の紐が一定の規則に従って絡み合ったものである。Braid の紐の上端と下端を図 2 のように繋げる操作を行うことで, 絡み目 (有限個の結び目が絡み合ったもの) が得られる。この操作と, それによって得られる絡み目を braid の閉包という。

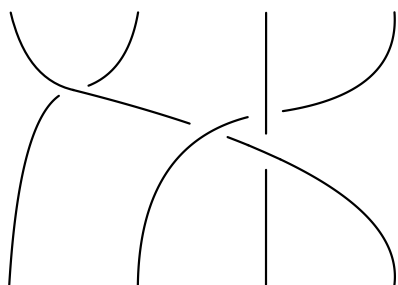


図 1 Braid

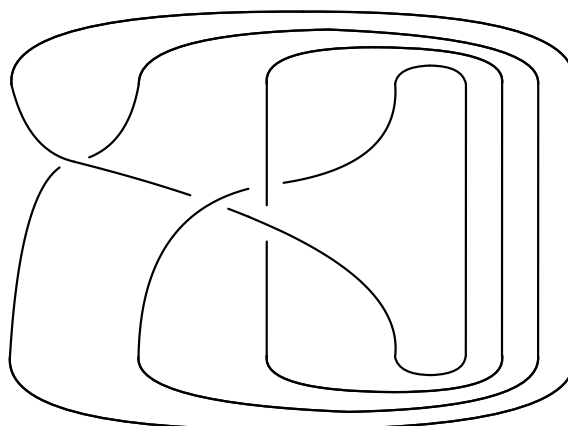


図 2 Braid の閉包

実は, 任意の絡み目は braid の閉包で書けることが Alexander の定理として知られている。また, 重要な結び目不変量に braid index というものがある。Braid index とは, 結び目や絡み目を braid の閉包として表現する際に必要な最小の紐の本数を指す。この不変量は, 絡み目の複雑さを測るための 1 つの指標として重要である。しかし, 特定の絡み目に対して braid index を決定することは容易ではない。なぜなら, 閉包を取ってその絡み目に一致するような braid が無限通り存在するためである。上から評価するには具体的な braid を何か 1 つ見つければ良いが, 一方で下からの評価は難しい。そこで, 次の不等式が有用となる [1].

$$1 + \frac{e_{\max} - e_{\min}}{2} \leq \beta(L).$$

e_{\max}, e_{\min} はそれぞれ与えられた絡み目 L の HOMFLY 多項式の変数 x の最大, 最小次数であ

る。また、 $\beta(L)$ は L の braid index である。HOMFLY 多項式は絡み目の図式から機械的に計算することができ、braid index に対しこの不等式で容易に下から評価することができる。さらに、交差数 10 以下の素な結び目において、この不等式による評価は数個の例外を除いて最良であることが知られている。この不等式は 1987 年に J. Franks と R. F. Williams によって発見された [1]。また、両名とは独立に 1986 年に H. R. Morton によって同一の結果が得られている [5]。

本論文では、[1] の議論に沿ってこの不等式の証明を与える。まず第 2 節で結び目理論の基本的な事項を紹介し、第 3 節で不等式を示す為の準備と主定理の証明を行う。

謝辞

本論文を執筆するにあたり、多くの方々からご支援とご指導をいただきました。この場を借りて、心より感謝申し上げます。

まず初めに本研究の指導教員である野崎雄太先生に、丁寧なご指導と貴重なアドバイスを賜りましたことに深く感謝申し上げます。ご多忙の中、研究の方向性を導いてくださり多くの励ましをいただきましたことが本論文の完成につながりました。また、短い間でしたがご指導いただきました梶原健先生に、研究の基礎となる知識や視点を教えていただきましたことを心より感謝申し上げます。

2 Link と Braid

この節では、結び目理論に関する基本的な事項を述べていく。また、本論文では $\mathbb{N}, \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\},$$

$$\mathbb{Z}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\}$$

とする。

2.1 Knots, links

定義 2.1. **結び目 (knot)** とは、 \mathbb{R}^3 へ滑らかに埋め込まれた S^1 の像を言う。つまり、埋め込み

$$\varphi: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$$

に対し、 $\text{Im } \varphi$ を knot と言う。ただし、 $(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}) \neq (0, 0, 0)$ とする。また、有限個の knot の非交和を **絡み目 (link)** という。各成分に向きが指定された link を、**向き付けられた絡み目 (oriented link)** という。

例 2.2. 図 3 は左からそれぞれ unknot, trefoil knot, figure-eight knot と呼ばれる結び目である。一般的に trefoil knot 及び figure-eight knot は、それぞれ $3_1, 4_1$ と表される。また、図中の矢印は向きを表している。

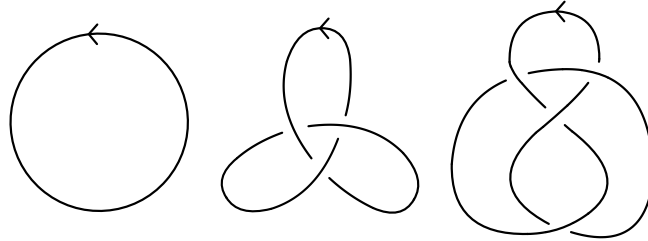


図3 左から unknot, trefoil knot, figure-eight knot.

定義 2.3. $k \in \mathbb{N}$ とする. L, L' を k 個の連結成分からなる oriented link とする. パラメータ $t \in [0, 1]$ について滑らかな微分同相写像の族

$$\{f_t: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3\}_{t \in [0,1]}$$

が存在し次の 2 条件を満たすとき, L, L' は **ambient isotopic** であるという.

- (1) $f_0 = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$.
- (2) $f_1(L) = L'$.

ただし, $\{f_t\}_{t \in [0,1]}$ がパラメータ $t \in [0, 1]$ について滑らかというのは, 写像

$$F: \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, t) \mapsto f_t(x)$$

が微分可能という意味である.

L と L' が ambient isotopic であるとき, $L \sim L'$ と表すこととする.

例 2.4. 図 4 の oriented link は全て互いに ambient isotopic である.

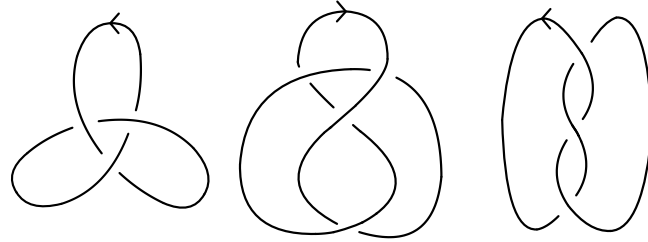


図4 Ambient isotopic な結び目

定義 2.5. Link L をある平面に射影した図式 D に対し、次の 3 つの操作をそれぞれ **Reidemeister move I, II, III** という。

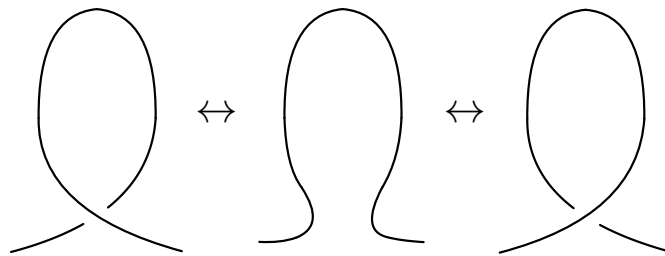


図5 Reidemeister move I

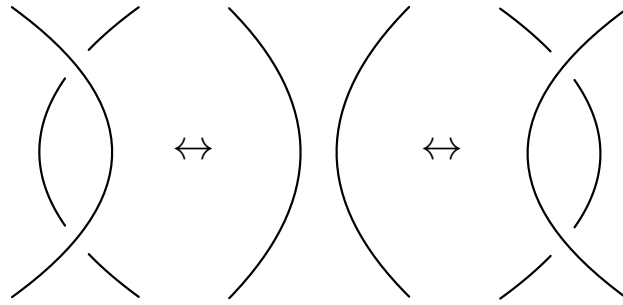


図 6 Reidemeister move II

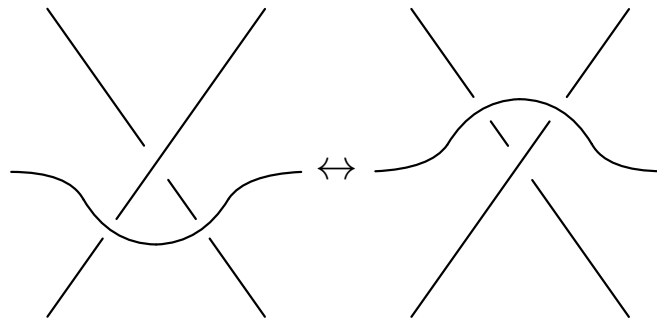


図 7 Reidemeister move III

定理 2.6. 2 つの link L, L' を同一の平面に射影した図式を考える. L の図式が有限回の Reidemeister move で L' と ambient isotopic な link の図式に変形できることと, $L \sim L'$ であることは必要十分である.

証明は省略する. 詳しくは [7, 節 1.7] を参照されたい.

定義 2.7. Link L の図式に対し, 全ての交差の上下を入れ替えた図式を与える link を L の鏡像といい L^* と表すこととする.

例 2.8. 3_1 結び目の鏡像は図 8 の様になる.

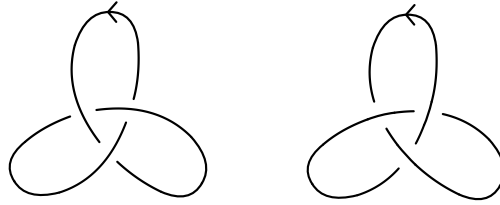


図8 左が 3_1 , 右が 3_1^* .

定義 2.9. 2つの向き付けられた結び目 K_1, K_2 に対し, 図9の様に向きに沿って繋げる操作を連結和という.

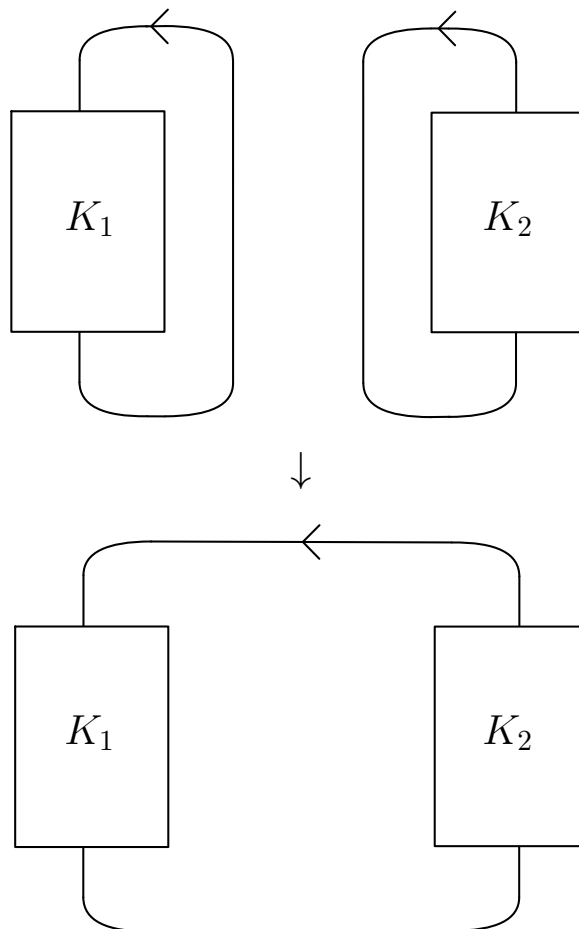


図9 向き付けられた結び目 K_1, K_2 の連結和

向き付けられた結び目 K が次の 2 条件を満たすとき, K を**素な結び目 (prime knot)** という.

- (1) K は unknot でない.
- (2) K は unknot でない 2 つの向き付けられた結び目の連結和で書けない.

例 2.10. 3_1 結び目は素な結び目であるが, 図 10 下の 2 つの 3_1 結び目の連結和は素な結び目でない.

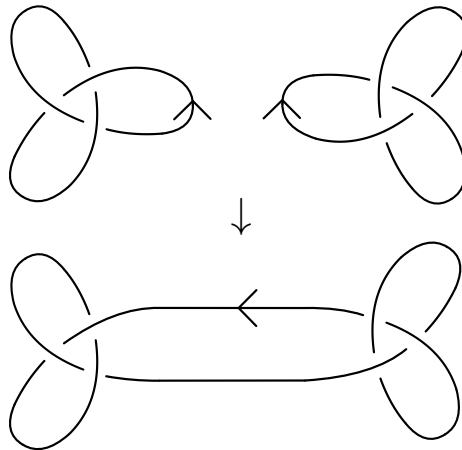


図 10 2 つの 3_1 結び目の連結和

2.2 Braid

定義 2.11. $n \in \mathbb{N}$ とする. $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対し $A_i, B_i \in \mathbb{R}^3$ を,

$$A_i = (i, 0, 0), \quad B_i = (i, 0, 1)$$

とする. また, n 個の埋め込み

$$\varphi_i: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (x_i(t), y_i(t), 1 - t), \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

が任意の $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対して次の 2 条件を満たしているとする.

- (1) $\varphi_i(0) \in \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, $\varphi_i(1) \in \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$.
- (2) $i \neq j$ ならば $\text{Im } \varphi_i \cap \text{Im } \varphi_j = \emptyset$ である.

各 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対し $\text{Im } \varphi_i$ を **strand** という. また, $\bigsqcup_{i=1}^n \text{Im } \varphi_i$ を n -strand の **braid (組み紐)** という. Braid に向きを考えるときは, 各 strand の z 座標が減少する方向へ沿って与えられるものとする.

例 2.12. 図 11 は braid の具体例である. 右の様な strand が絡まっていない braid を自明な braid という.

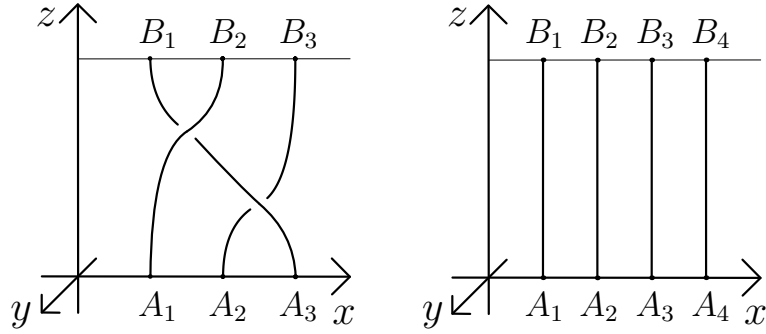


図 11 y 軸に垂直な平面に射影した braid の図.

注意 2.13. Braid b に対し, $M \in \mathbb{R}$ を $M < \min\{y \in \mathbb{R} \mid (x, y, z) \in b\}$ とする. Braid の図を考えるとき, 図 3 の具体例の様に平面 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, z \in \mathbb{R}, y = M\}$ に射影した図で考える.

定義 2.14. b, b' を n -strand の braid とする. パラメータ $t \in [0, 1]$ について滑らかな微分同相写像の族

$$\{f_t: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (g_t(x), h_t(y), z)\}_{t \in [0, 1]}$$

が存在し次の 2 条件を満たすとき, b, b' は同値であるとする.

- (1) $f_0 = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$.
- (2) $f_1(b) = b'$.

ただし, $\{f_t\}_{t \in [0, 1]}$ がパラメータ $t \in [0, 1]$ について滑らかというのは, 定義 2.3 と同様に写像

$$F: \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, t) \mapsto f_t(x)$$

が微分可能という意味である.

2 つの braid b, b' が同値であるとき, $b \stackrel{\text{B}}{=} b'$ と表すこととする. n 次の braid 全体の集合を \mathcal{B}_n とすると, $\stackrel{\text{B}}{=}$ は \mathcal{B}_n 上の同値関係となる. 集合 B_n を,

$$B_n = \mathcal{B}_n / \stackrel{\text{B}}{=}$$

と定義する. 一般的に, b を代表元とする同値類も b と書き, $b \in B_n$ のことも braid と呼ぶ.

定義 2.15. $b, b' \in B_n$ に対し, 積 bb' を次の図 12 の様に b と b' を上下に繋げる操作として定める.

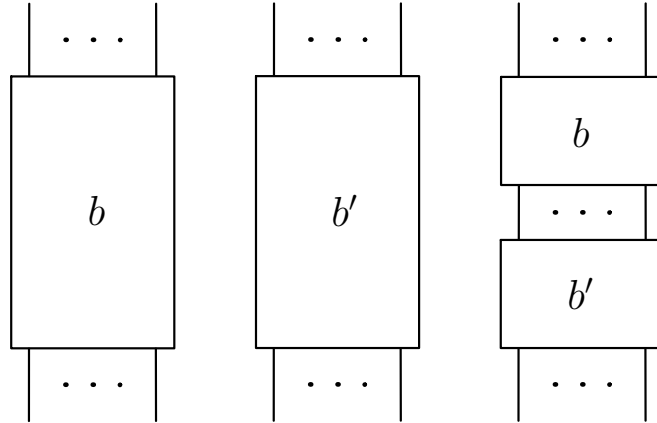


図 12 左から b, b', bb' .

B_n はこの積について群となる. この群 B_n を n 次の **braid 群** という. 単位元は自明な braid で, 1 と表すこととする.

定理 2.16. Braid 群 B_n は,

$$\langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \ (1 \leq i \leq n-2), \ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \ (|i-j| \geq 2) \rangle$$

という群の表示を持つ.

Proof. $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ に対し, σ_i を図 13 の様な i 番目と $i+1$ 番目の strand のみが交差する braid に対応させる準同型写像を

$$\phi: \langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \ (1 \leq i \leq n-2), \ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \ (|i-j| \geq 2) \rangle \rightarrow B_n$$

とする.

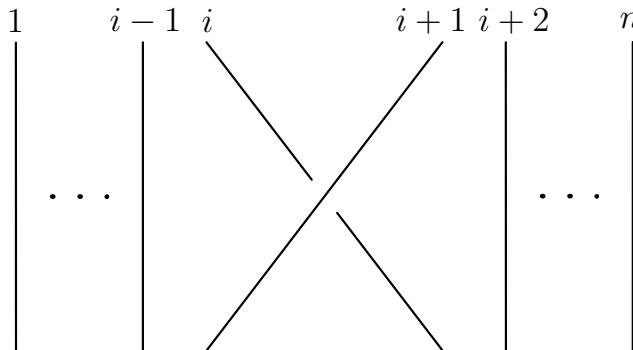


図 13 i 本目と $i+1$ 本目の strand のみが交差した braid.

図 14 から, B_n の中で

$$\phi(\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i) \stackrel{B}{=} \phi(\sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}) \quad (1 \leq i \leq n-2), \quad \phi(\sigma_i \sigma_j) \stackrel{B}{=} \phi(\sigma_j \sigma_i) \quad (|i-j| \geq 2)$$

が成り立つことがわかる. よって ϕ は well-defined である.

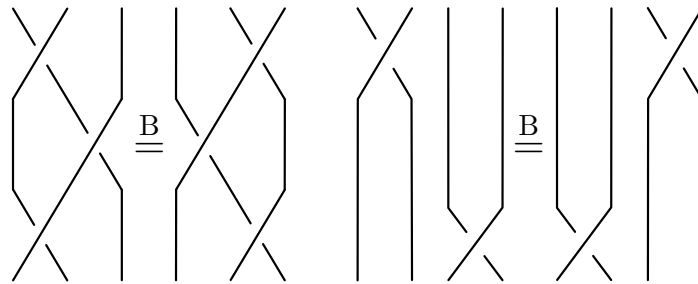


図 14 左が $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$, 右が $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$.

任意の braid に対して, 図 15 の様に異なる交差が同じ高さにならない様な代表元をとることができる.

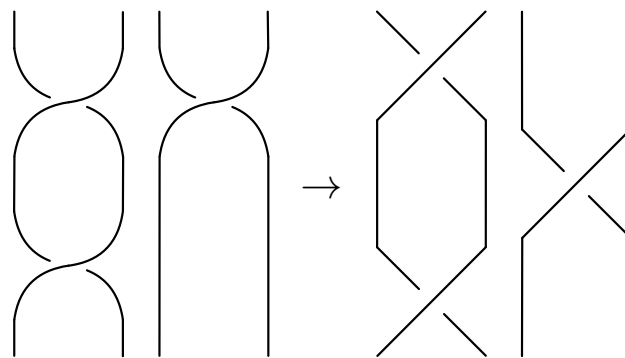


図 15 異なる交差の高さが一致しない様にとる.

すると, 任意の braid は $\phi(\sigma_1), \phi(\sigma_2), \dots, \phi(\sigma_{n-1})$ の積で書けることがわかる. よって ϕ は全射である.

ϕ が単射であることを示すのはここでは省略する. 詳細については, [3, Theorem 1.12] を参照されたい. \square

注意 2.17. 以下, 特に断らない限り σ_i は図 13 の様な i 番目と $i+1$ 番目の strand のみが交差する braid を指すこととする.

2.3 Braid の閉包

定義 2.18. $b \in B_n$ に対し, 図 16 の様に strand の上端と下端とを繋げる操作を行う.

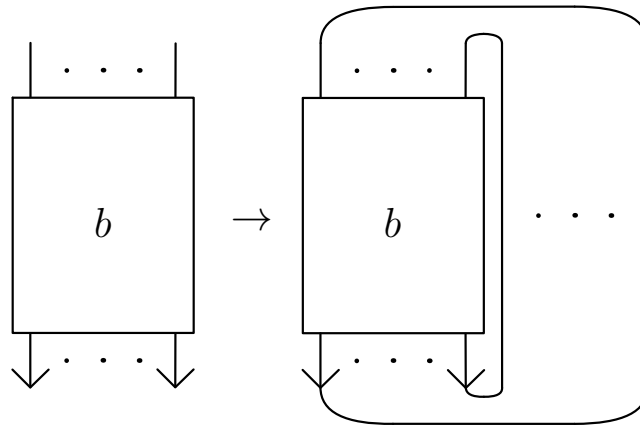


図 16 左が braid, 右が braid の閉包.

この操作によって oriented link が得られるが, これを braid の**閉包**という. こうして得られた oriented link の向きは, 閉包を取る前の braid の向きによって与えられる. b の閉包を取って得られた oriented link を \widehat{b} と表す.

定理 2.19 (Alexander の定理). 任意の oriented link L に対し, ある $n \in \mathbb{N}$ があり $\widehat{b} \sim L$ を満たす $b \in B_n$ が存在する.

証明は省略する. 詳しくは, [3, Theorem 2.3] を参照されたい.

定義 2.20. Oriented link L に対し,

$$\beta(L) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \text{ある } b \in B_n \text{ が存在して } \widehat{b} \sim L.\}$$

を L の **braid index** という.

例 2.21. 図 17 より, figure-eight knot の braid index は 3 以下であることがわかる.

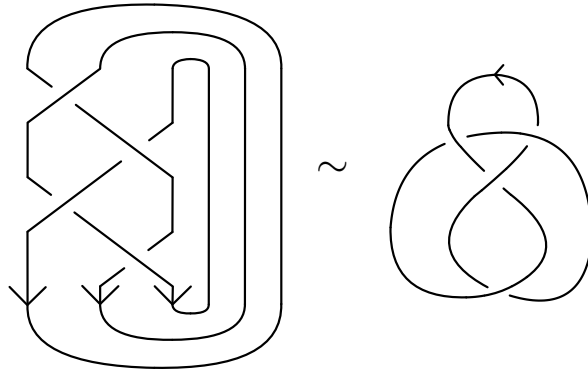


図 17 左は braid の閉包を取った oriented link であり, この 2 つの oriented link は ambient isotopic である [8, 図 1.27].

定義 2.22. $b, b' \in B_n$ に対し, 次の操作 (1), (2) を **Markov move** という.

(1) 共役 : $bb' \leftrightarrow b'b$.

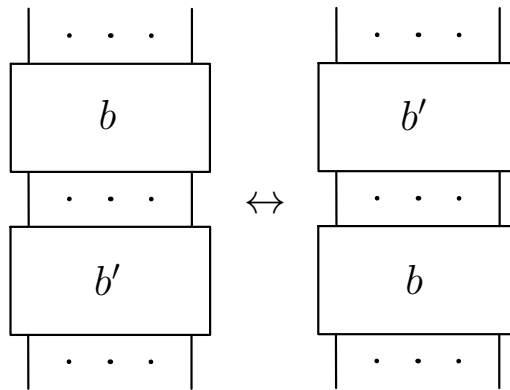


図 18 左は bb' , 右は $b'b$.

(2) 安定化とその逆 : $b \leftrightarrow b\sigma_n^{\pm 1}$.

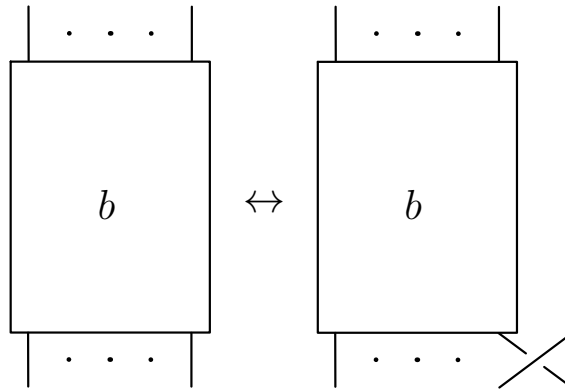


図 19 図は $b\sigma_n$ のときである.

注意 2.23. 安定化とその逆において, $b \in B_n$ であるとき $b\sigma_n^{\pm 1} \in B_{n+1}$ である.

定理 2.24 (Markov の定理). $b \in B_n, b' \in B_{n'}$ とする. $\widehat{b} \sim \widehat{b'}$ であることと, b と b' が有限回の Markov move で変形し合えることは必要十分である.

Proof. 必要条件を示す. $b, b' \in B_n$ が 1 度の Markov move で変形し合えるとする. Markov move で共役をとるとき, 図 20 の様に b を外側の結ばれていない紐の上を 1 周滑らせてくることで, $\widehat{bb'} \sim \widehat{b'b}$ であることがわかる.

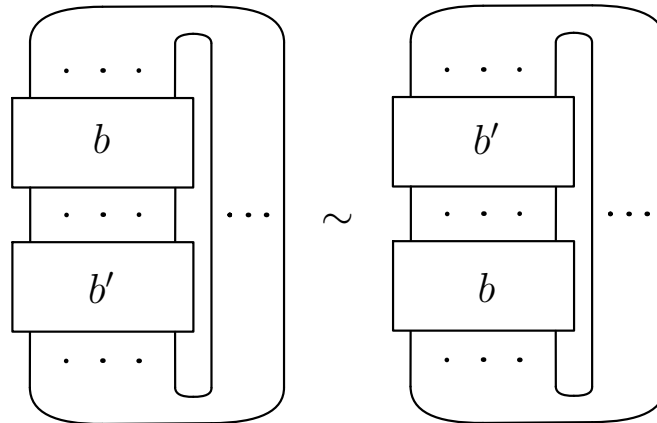


図 20 左は $\widehat{bb'}$, 右は $\widehat{b'b}$.

Markov move で安定化, またはその逆をとるとき, 図 21 の様に内側の輪をほどくことができるので, $\widehat{b} \sim \widehat{b\sigma_n^{\pm 1}}$ であることがわかる.

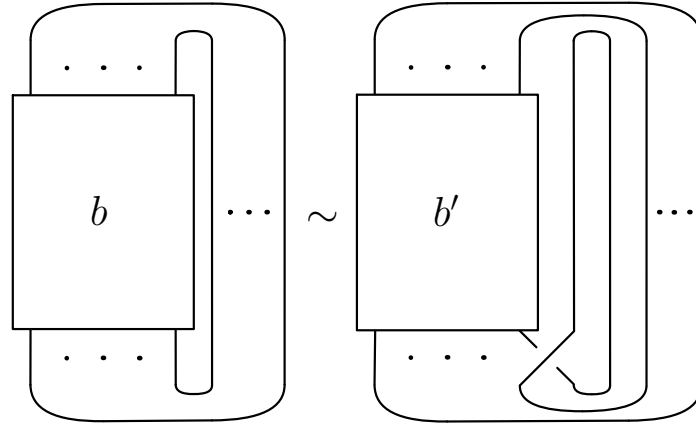


図 21 左は \widehat{b} , 右は $\widehat{b\sigma_n}$.

よって, b と b' が有限回の Markov move で変形し合えるならば, $\widehat{b} \sim \widehat{b'}$ である. しかし, 逆を示すのは難解であるため, ここでは省略する. 証明の残りの部分については, [3, Theorem 2.8] を参照されたい. \square

3 HOMFLY 多項式とその次数に関する不等式

3.1 HOMFLY 多項式

定義 3.1. Oriented link L に対し, その射影図を考える. 射影図の上では, 交差は図 22 の様な 2 つの状態が考えられる.

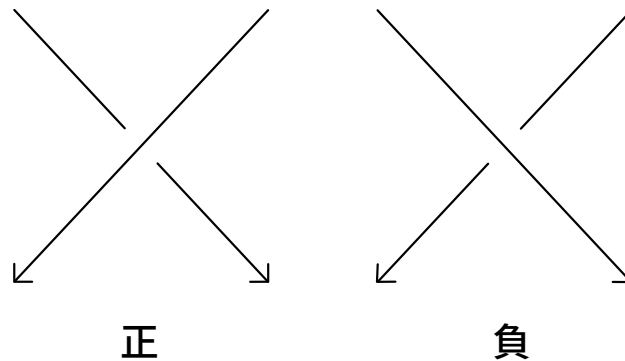


図 22 交差の正負

左を正の交差, 右を負の交差として交差に符号を定める.

定義 3.2. 図 23 は点線の外側は全て一致しており、ある交差 X の近傍のみが異なっている 3 つの oriented link の射影図である。 X が正であるものを L^+ 、 X が負であるものを L^- 、 X の交差を解消したものを L_0 とする。

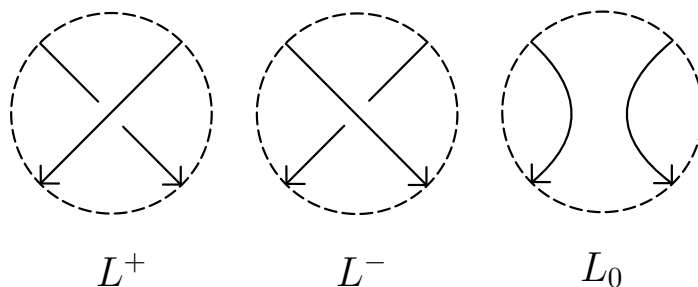


図 23 点線の内側は交差 X の近傍.

\mathbb{R}^3 内の oriented link L に対し、次の 2 条件を満たす Laurent 多項式 $P(L) \in \mathbb{Z}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ を **HOMFLY 多項式** という。ただし、 \bigcirc は unknot を表す。

- (1) $xP(L^+) + x^{-1}P(L^-) + yP(L_0) = 0$.
- (2) $P(\bigcirc) = 1$.

条件 (1) の様な関係式を HOMFLY 多項式の **skein 関係式** という。 HOMFLY 多項式は oriented link に対する不変量となる。 則ち、 ambient isotopic な oriented link $L \sim L'$ に対し、 $P(L) = P(L')$ である。 本論文内では、 braid b に対し $P(b)$ と書けば、 \widehat{b} の HOMFLY 多項式のことを指すこととする。

また、 HOMFLY 多項式の skein 関係式を

$$xP(L^+) - x^{-1}P(L^-) - yP(L_0) = 0$$

とする場合もある。 条件 (1) の式において x を ix' 、 y を $-iy'$ と置き換え整理することで、 もう 1 つの skein 関係式が得られる。

注意 3.3. Oriented link の図式が与えられたとき、その各交差に対し順に skein 関係式を用いることで漸化的に HOMFLY 多項式を計算できる。 同じ図式に対しては、どの交差から計算しても同じ結果が得られる。 さらに、 HOMFLY 多項式は Reidemeister move I,II,III で不変である。 よって、 HOMFLY 多項式は oriented link に対する不変量となることがわかる。

Oriented link の不変量には HOMFLY 多項式の他に、有名なものに 1 変数 Laurent 多項式である **Jones 多項式** と **Alexander 多項式** がある。 Jones 多項式と Alexander 多項式をそれぞれ

$J(L), A(L) \in \mathbb{Z}[t^{\pm\frac{1}{2}}]$ と表すこととする. HOMFLY 多項式の変数を $x = it^{-1}$, $y = i(t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}})$ と置き換えることで, Jones 多項式の skein 関係式

$$t^{-1}J(L^+) - tJ(L^-) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})J(L_0)$$

が得られる. また, $x = i$, $y = i(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})$ と置き換えることで, Alexander 多項式の skein 関係式

$$A(L^+) - A(L^-) = (t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}})A(L_0)$$

が得られる. よって, HOMFLY 多項式は単なる多項式不変量というだけでなく, 他の多項式不変量の情報をも持っていることがわかる.

例 3.4. Trefoil knot 3_1 と figure-eight knot 4_1 の HOMFLY 多項式はそれぞれ次のようになる.

$$P(3_1) = -x^4 + x^2y^2 - 2x^2.$$

$$P(4_1) = -x^2 - x^{-2} + y^2 - 1.$$

図 24 の oriented link をそれぞれ H_1, H_2 とする. H_1, H_2 の様に 2 つの unknot からなる link を Hopf link という.

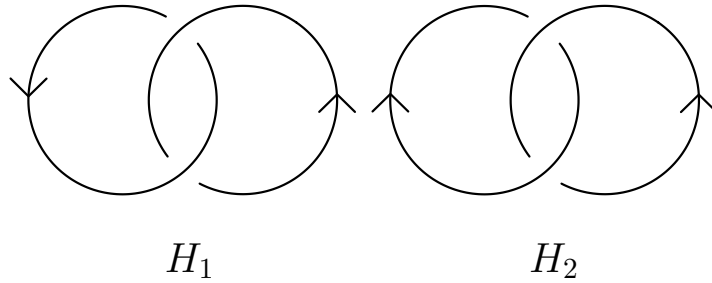


図 24 向き付けられた Hopf link H_1, H_2

H_1, H_2 の HOMFLY 多項式はそれぞれ次のようになる.

$$P(H_1) = x^3y^{-1} + xy^{-1} - xy.$$

$$P(H_2) = x^{-3}y^{-1} + x^{-1}y^{-1} - x^{-1}y.$$

命題 3.5. Oriented link L の HOMFLY 多項式 $P(L) = P(L)(x, y)$ に対し,

$$P(L)(x^{-1}, y) = P(L^*)(x, y)$$

が成り立つ. ただし, L^* は定義 2.7 により与えられる L の鏡像である.

この命題の証明は付録 A で与える.

3.2 Invariant computation tree

定義 3.6. Markov move のうち, 安定化とその逆を正の交差のみに制限したものを **invariant Markov move** という.

定義 3.7. $b \in B_n$ が $\alpha, \beta, \sigma_i^\varepsilon \in B_n$ ($\varepsilon = \pm 1$) を用いて, $b = \alpha\sigma_i^\varepsilon\beta$ と書けているとする. また, $b_0, b^- \in B_n$ を $b_0 = \alpha\beta$, $b^- = \alpha\sigma_i^{-\varepsilon}\beta$ とする.

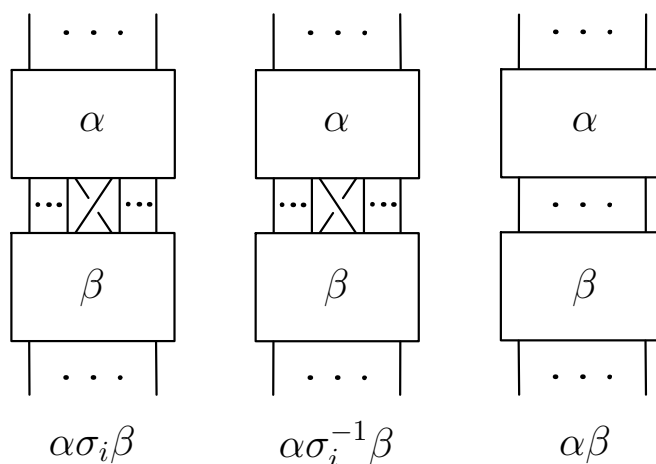


図 25 左からそれぞれ $\varepsilon = 1$ のときの b, b^-, b_0 .

このとき x, y を変数とする単項式 $p_0, p^- \in \mathbb{Z}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ を次の様に定める.

$$p_0 = \begin{cases} -xy & \text{if } \varepsilon = -1, \\ -x^{-1}y & \text{if } \varepsilon = 1. \end{cases}$$

$$p^- = \begin{cases} -x^2 & \text{if } \varepsilon = -1, \\ -x^{-2} & \text{if } \varepsilon = 1. \end{cases}$$

このとき,

$$P(b) = p_0 P(b_0) + p^- P(b^-)$$

が成り立つ. この様にして braid の 1 つの交差に着目し, その交差を入れ替えたものと交差を解消したものに分解することを **Conway split** という.

定義 3.8. 根付きの木であって, 全てのノードが持つ子の数が高々 2 であるものを二分木という. 例えば, 次の様なものを二分木という.

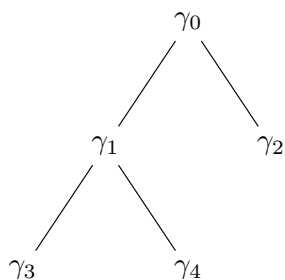


図 26 二分木の例

各頂点をノードといい、特に最も上層にある 1 つのノードを根という。上の二分木では γ が根にあたる。あるノードに対しそのノードと繋がった下層のノードを子ノード、子ノードと繋がった上層のノードを親ノードという。上の二分木では γ に対し γ_0, γ_1 は子ノード、 γ_0, γ_1 に対し γ は親ノードである。最も下層のノードを終端ノードという。上の二分木では γ_2, γ_3 が終端ノードである。また、各ノードを繋ぐ線を辺という。根から $k \in \mathbb{N}$ 本のノードを介して繋がっているノードを、第 k 層のノードと呼ぶこととする。 γ_1, γ_2 は第 1 層のノード、 γ_3, γ_4 は第 2 層のノードである。根は第 0 層のノードとする。

ある二分木の全てのノードが braid でラベル付けされ、全ての辺が $\mathbb{Z}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ の単項式でラベル付けされているとする。任意のノード γ とその子ノード γ', γ'' 、およびそのノードを繋ぐ辺を考える。 $\gamma, \gamma', \gamma''$ が $b \in B_n, b' \in B_{n'}, b'' \in B_{n''}$ でラベル付けされているとする。また、 γ と γ' をつなぐ辺が単項式 $p' \in \mathbb{Z}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ 、 γ と γ'' をつなぐ辺が単項式 $p'' \in \mathbb{Z}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ でラベル付けされているとする。

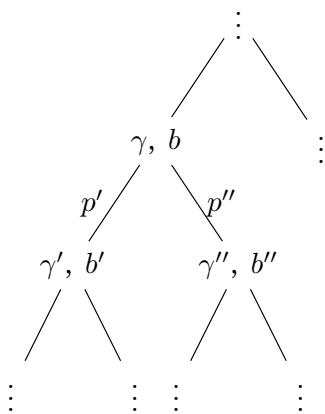


図 27 $b \in B_n, b' \in B_{n'}, b'' \in B_{n''}, p' \in \mathbb{Z}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}], p'' \in \mathbb{Z}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$.

これらの braid の HOMFLY 多項式と単項式 p', p'' が

$$P(b) = p'P(b') + p''P(b'')$$

を満たすとき、この二分木を **computation tree** という。

また, Computation tree が次の 2 条件を満たすとき, **invariant computation tree** という.

- (1) 任意の親ノードをラベル付けする $b \in B_n$ と, その子ノードをラベル付けする $b' \in B_{n'}, b'' \in B_{n''}$ に対し, b に有限回の invariant Markov move と 1 度の Conway split を行うことで b', b'' が得られる. このとき, $n', n'' \leq n$ である.
- (2) 任意の終端ノードは, 自明な braid でラベル付けされる.

3.3 証明の準備

以上で述べたことを用いて, 主定理の証明の為に必要な概念や補題を準備する.

定義 3.9. $b \in B_n$ に対し, 次の様に定めた $c(b) \in \mathbb{Z}$ を b の **writhe** という.

$$c(b) = \#\{b \text{ の正の交差} \} - \#\{b \text{ の負の交差} \}.$$

例えば, b が図 28 の様に与えられたとき, writhe は 1 である.

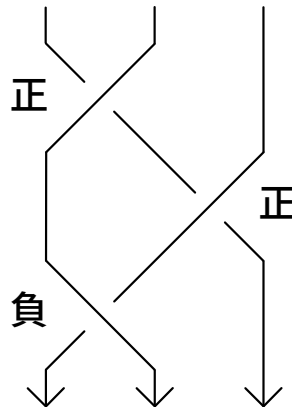


図 28 正の交差が 2 つ, 負の交差が 1 つの braid.

注意 3.10. Braid の射影図は一意に定まらないが, braid 群の関係式で正の交差, 負の交差の総数はそれぞれ不変である. よって, 任意の braid に対し writhe が一意に定まる.

定義 3.11. $b \in B_n$ に対し,

$$\chi(b) = n - c(b)$$

と定める.

注意 3.12. Braid 群の関係式に対して c は不変であるから, $b \stackrel{B}{=} b'$ である $b, b' \in B_n$ に対し $\chi(b) = \chi(b')$ である.

補題 3.13. Invariant computation tree の任意のノード γ に対し, γ をラベル付けする $b \in B_n$ と γ の子ノード γ' をラベル付けする $b' \in B_{n'}$, および γ, γ' をつなぐ辺をラベル付けする単項式 $p' \in \mathbb{Z}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ を考える.

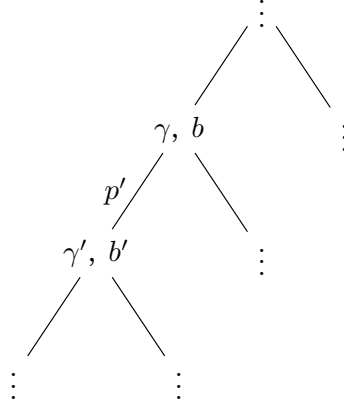


図 29 $b \in B_n, b' \in B_{n'}, p' \in \mathbb{Z}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$

$e_x \in \mathbb{Z}$ を p' の x の次数とすると,

$$\chi(b) = \chi(b') + e_x$$

が成り立つ.

Proof. $b \in B_n$ に invariant Markov move を 1 度行ったものを $b' \in B_{n'}$ とする. Invariant Markov move として共役をとるとき,

$$n' = n, c(b') = c(b)$$

であるから,

$$\chi(b) = \chi(b').$$

Invariant Markov move として安定化をとるとき,

$$n' = n + 1, c(b') = c(b) + 1$$

であるから,

$$\begin{aligned} \chi(b') &= n' - c(b') \\ &= n + 1 - (c(b) + 1) \\ &= n - c(b) \\ &= \chi(b). \end{aligned}$$

よって, invariant Markov move で $\chi(b)$ は不変である.

$b \in B_n$ のある 1 つの交差を X とする. 交差 X を解消した braid を $b_0 \in B_n$ とする. X が正の交差であるとき,

$$c(b_0) = c(b) - 1, \quad p = -x^{-1}y.$$

X が負の交差であるとき,

$$c(b_0) = c(b) + 1, \quad p = -xy.$$

よって,

$$\begin{aligned} \chi(b_0) + e_x &= n - c(b_0) + e_x \\ &= n - (c(b) \pm 1) + (\pm 1) \\ &= n - c(b) \mp 1 \pm 1 \\ &= n - c(b) \\ &= \chi(b). \end{aligned}$$

交差 X の正負を逆にした braid を $b^- \in B_n$ とする. X が正の交差であるとき,

$$c(b^-) = c(b) - 2, \quad p = -x^{-2}.$$

X が負の交差であるとき,

$$c(b^-) = c(b) + 2, \quad p = -x^2.$$

よって,

$$\begin{aligned} \chi(b^-) + e_x &= n - c(b^-) + e_x \\ &= n - (c(b) \pm 2) + (\pm 2) \\ &= n - c(b) \mp 2 \pm 2 \\ &= n - c(b) \\ &= \chi(b). \end{aligned}$$

□

定義 3.14. γ_0 を根とする invariant computation tree Γ を考える. 任意のノード γ に対し, γ と γ_0 をつなぐ全ての辺にラベル付けされた単項式を全てかけ合わせたものを **root-path 単項式** といい, $R(\gamma_t) \in \mathbb{Z}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ と表すこととする. ただし, $R(\gamma_0) = 1$ とする.

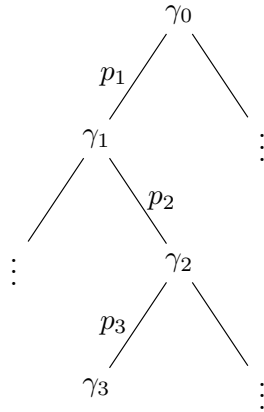


図 30 $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{Z}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$

例えば Γ がこの様に与えられたとき、各ノードの root-path 単項式は

$$R(\gamma_0) = 1,$$

$$R(\gamma_1) = p_1,$$

$$R(\gamma_2) = p_1 p_2,$$

$$R(\gamma_3) = p_1 p_2 p_3$$

となる。

また、 $R(\gamma)$ は x, y を変数とする単項式であるが、 $R(\gamma)$ の x, y の次数をそれぞれ $\deg_x R(\gamma), \deg_y R(\gamma) \in \mathbb{Z}$ と書くこととする。

補題 3.15. γ_0 を根に持つ invariant computation tree Γ を考える。根 γ_0 と Γ の根でない任意のノード γ に対し、それぞれ $b_0 \in B_{n_0}, b \in B_n$ でラベル付けされているとする。

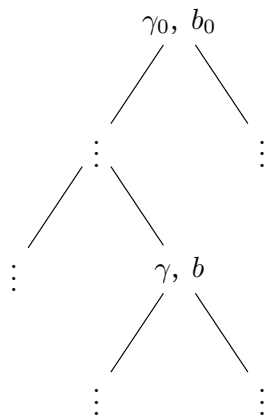


図 31 $b_0 \in B_{n_0}, b \in B_n$

このとき,

$$\chi(b_0) = \chi(b) + \deg_x R(\gamma)$$

が成り立つ.

Proof. ノードの層に関する帰納法で示す. γ を第 1 層のノードとすると, 補題 3.13 より,

$$\chi(b_0) = \chi(b) + \deg_x R(\gamma).$$

γ を第 k 層のノードとする. また, 第 $k-1$ 層の全てのノードに対し, 補題 3.15 が成り立つと仮定する. γ' を, γ の親ノードであって $b' \in B_{n'}$ でラベル付けされているノードとする. γ' は第 $k-1$ 層のノードであるから, 仮定より

$$\chi(b_0) = \chi(b') + \deg_x R(\gamma').$$

γ' と γ をつなぐ辺が $p \in \mathbb{Z}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ でラベルつけられているとし, p の x の次数を e_x とする. 補題 3.13 より,

$$\chi(b') = \chi(b) + e_x.$$

よって,

$$\begin{aligned} \chi(b_0) &= \chi(b') + \deg_x R(\gamma') \\ &= \chi(b) + e_x + \deg_x R(\gamma') \\ &= \chi(b) + \deg_x R(\gamma). \end{aligned}$$

□

定義 3.16. $b \in B_n$ が具体的に

$$b = \sigma_{\lambda_1}^{\varepsilon_{\lambda_1}} \sigma_{\lambda_2}^{\varepsilon_{\lambda_2}} \cdots \sigma_{\lambda_m}^{\varepsilon_{\lambda_m}}$$

という積で書かれているとき, $\sigma_{\lambda_1}^{\varepsilon_{\lambda_1}} \sigma_{\lambda_2}^{\varepsilon_{\lambda_2}} \cdots \sigma_{\lambda_m}^{\varepsilon_{\lambda_m}}$ を b の **braid word** と呼ぶこととする.

定義 3.17. $n-1$ 個の文字 s_1, s_2, \dots, s_{n-1} で生成される自由モノイドを \mathfrak{B}_n とする.

写像 $w: \mathfrak{B}_n \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を,

$$w(s_{\lambda_1} s_{\lambda_2} \cdots s_{\lambda_m}) = \sum_{i=1}^m \lambda_i,$$

$$w(1) = 0$$

と定める.

B_n の部分集合 B_n^+ を, 全ての交差が正である同値類を持つ braid 全体と単位元 1 の集合とする. B_n^+ の元を **positive braid** と呼ぶこととする. 自然な射影

$$\psi: \mathfrak{B}_n \rightarrow B_n^+, s_i \mapsto \sigma_i$$

を考える. $b \in B_n^+$ の braid word が $\sigma_{\lambda_1}\sigma_{\lambda_2}\cdots\sigma_{\lambda_m}$ と与えられたとき, $s_{\lambda_1}s_{\lambda_2}\cdots s_{\lambda_m} \in \mathfrak{B}_n$ が存在して,

$$\psi(s_{\lambda_1}s_{\lambda_2}\cdots s_{\lambda_m}) = \sigma_{\lambda_1}\sigma_{\lambda_2}\cdots\sigma_{\lambda_m}$$

である. $w(s_{\lambda_1}s_{\lambda_2}\cdots s_{\lambda_m})$ を, b の braid word $\sigma_{\lambda_1}\sigma_{\lambda_2}\cdots\sigma_{\lambda_m}$ の **weight** と呼ぶこととする. α を positive braid のある braid word とするとき, α の weight を $w_\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と書くこととする.

補題 3.18. $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ に対し,

$$B_{n,i}^+ = \begin{cases} \{\sigma_{\lambda_1}\sigma_{\lambda_2}\cdots\sigma_{\lambda_m} \in B_n^+ \mid \text{任意の } j \in \{1, 2, \dots, m\} \text{ に対し } \lambda_j \leq i. \} & \text{if } i \geq 1, \\ \{1\} & \text{if } i = 0 \end{cases}$$

とする.

$b \in B_n^+$ に対し, b の braid word が $\sigma_{i+1}\alpha_i\sigma_{i+1}$ と与えられたとする. ただし, $\sigma_{i+1} \in \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}\}$, $\alpha_i \in B_{n,i}^+$ である. このとき, 次の条件 (1) または (2) が成り立つ.

- (1) $\sigma_j \in \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}\}$ 及び $\alpha, \alpha' \in B_{n,i+1}^+$ が存在し, braid word $\alpha\sigma_j^2\alpha'$ に対し $b \stackrel{B}{=} \alpha\sigma_j^2\alpha'$ である.
- (2) Braid word $\alpha'' \in B_{n,i+1}^+$ が存在し, $\alpha'' \stackrel{B}{=} \sigma_i\alpha_{i-1}\sigma_i$ かつ $w_{\alpha''} \leq w_{\sigma_i\alpha_{i-1}\sigma_i}$ である.

Proof. i に関する帰納法で示す. $i = 0$ のとき,

$$\sigma_1\alpha_0\sigma_1 = \sigma_1^2.$$

よって, $\sigma_1\alpha_0\sigma_1$ は条件 (1) を満たす.

$k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ とする. Braid word $\sigma_k\alpha_{k-1}\sigma_k$ ($\sigma_k \in \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}\}$, $\alpha_{k-1} \in B_{n,k-1}^+$) を考える. $i \leq k-1$ ならば, $\sigma_i\alpha_{i-1}\sigma_i$ と書ける任意の positive braid は補題 3.18 を満たすと仮定する. また, $\alpha_{k-1} = \sigma_{\lambda_1}\sigma_{\lambda_2}\cdots\sigma_{\lambda_m}$ とし, $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を

$$s = \#\{j \in \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\} \mid \lambda_j = k-1\}$$

とする.

$s = 0$ のとき, braid 群の関係式 $\sigma_i\sigma_j \stackrel{B}{=} \sigma_j\sigma_i$ ($|i-j| \geq 2$) より

$$\sigma_k\alpha_{k-1}\sigma_k \stackrel{B}{=} \alpha_{k-1}\sigma_k^2.$$

よって, $\sigma_k\alpha_{k-1}\sigma_k$ は条件 (1) を満たす.

$s = 1$ のとき, braid word $\alpha_{k-2}, \alpha'_{k-2} \in B_{n,k-2}^+$ が存在して

$$\sigma_k\alpha_{k-1}\sigma_k = \sigma_k\alpha_{k-2}\sigma_{k-1}\alpha'_{k-2}\sigma_k$$

と書ける. Braid 群の関係式 $\sigma_i\sigma_j \stackrel{B}{=} \sigma_j\sigma_i$ ($|i-j| \geq 2$) より,

$$\sigma_k\alpha_{k-2}\sigma_{k-1}\alpha'_{k-2}\sigma_k \stackrel{B}{=} \alpha_{k-2}\sigma_k\sigma_{k-1}\sigma_k\alpha'_{k-2}.$$

Braid 群の関係式 $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \stackrel{\text{B}}{=} \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ ($1 \leq i \leq n-2$) より,

$$\alpha_{k-2} \sigma_k \sigma_{k-1} \sigma_k \alpha'_{k-2} \stackrel{\text{B}}{=} \alpha_{k-2} \sigma_{k-1} \sigma_k \sigma_{k-1} \alpha'_{k-2}.$$

このとき, braid word $\sigma_k \alpha_{k-1} \sigma_k$ 及び $\alpha_{k-2} \sigma_{k-1} \sigma_k \sigma_{k-1} \alpha'_{k-2}$ に対し,

$$w_{\alpha_{k-2} \sigma_{k-1} \sigma_k \sigma_{k-1} \alpha'_{k-2}} = w_{\sigma_k \alpha_{k-1} \sigma_k} - 1.$$

よって, $\sigma_k \alpha_{k-1} \sigma_k$ は条件 (2) を満たす.

$s \geq 2$ のとき, braid word $\alpha'_{k-1}, \alpha''_{k-1} \in B_{n,k-1}^+$ 及び $\alpha_{k-2} \in B_{n,k-2}^+$ が存在して,

$$\sigma_k \alpha_{k-1} \sigma_k = \sigma_k \alpha'_{k-1} \sigma_{k-1} \alpha_{k-2} \sigma_{k-1} \alpha''_{k-1} \sigma_k.$$

帰納法の仮定より, $\sigma_{k-1} \alpha_{k-2} \sigma_{k-1}$ は条件 (1) または (2) を満たす. $\sigma_{k-1} \alpha_{k-2} \sigma_{k-1}$ が条件 (1) を満たすとき, $\sigma_j \in \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}\}$ 及び $\alpha, \alpha' \in B_{n,i}^+$ が存在し, braid word $\alpha \sigma_j^2 \alpha'$ に対し

$$\sigma_{k-1} \alpha_{k-2} \sigma_{k-1} \stackrel{\text{B}}{=} \alpha \sigma_j^2 \alpha'$$

であるから,

$$\sigma_k \alpha_{k-1} \sigma_k \stackrel{\text{B}}{=} \sigma_k \alpha'_{k-1} \alpha \sigma_j^2 \alpha' \alpha''_{k-1} \sigma_k.$$

よって, $\sigma_k \alpha_{k-1} \sigma_k$ は条件 (1) を満たす. $\sigma_{k-1} \alpha_{k-2} \sigma_{k-1}$ が条件 (2) を満たすとき, braid word $\alpha'' \in B_{n,k}^+$ が存在して,

$$\alpha'' \stackrel{\text{B}}{=} \sigma_{k-1} \alpha_{k-2} \sigma_{k-1} \text{ かつ, } w_{\alpha''} \leq w_{\sigma_{k-1} \alpha_{k-2} \sigma_{k-1}} - 1.$$

よって,

$$\sigma_k \alpha_{k-1} \sigma_k \stackrel{\text{B}}{=} \sigma_k \alpha'_{k-1} \alpha \alpha''_{k-1} \sigma_k.$$

と書ける. このとき,

$$\begin{aligned} w_{\sigma_k \alpha'_{k-1} \alpha \alpha''_{k-1} \sigma_k} &= w_{\sigma_k \alpha'_{k-1}} + w_{\alpha} + w_{\alpha''_{k-1} \sigma_k} \\ &\leq w_{\sigma_k \alpha'_{k-1}} + w_{\sigma_{k-1} \alpha_{k-2} \sigma_{k-1}} - 1 + w_{\alpha''_{k-1} \sigma_k} \\ &= w_{\sigma_k \alpha'_{k-1} \sigma_{k-1} \alpha_{k-2} \sigma_{k-1} \alpha''_{k-1} \sigma_k} - 1 \\ &= w_{\sigma_k \alpha_{k-1} \sigma_k} - 1. \end{aligned}$$

よって, $\sigma_k \alpha_{k-1} \sigma_k$ は条件 (2) を満たす. □

定義 3.19. 写像 $l: B_n \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を

$$l(b) = \begin{cases} 0 & \text{if } b \stackrel{\text{B}}{=} 1, \\ \min\{k \in \mathbb{N} \mid b \stackrel{\text{B}}{=} \sigma_{\lambda_1}^{\varepsilon_{\lambda_1}} \sigma_{\lambda_2}^{\varepsilon_{\lambda_2}} \cdots \sigma_{\lambda_k}^{\varepsilon_{\lambda_k}}\} & \text{if } b \not\stackrel{\text{B}}{=} 1 \end{cases}$$

と定める. ただし, $\lambda_i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, $\varepsilon_{\lambda_i} = \pm 1$ である. $b \in B_n$ に対し, $l(b)$ を b の length という.

補題 3.20. 任意の $b \in B_n^+$ に対し次の条件 (1) または (2) のうち少なくとも一方を満たす $b' \in B_{n'}^+$ が存在し、有限回の invariant Markov move で b を b' に変形できる。

- (1) $b' \stackrel{\text{B}}{=} 1$,
- (2) $\sigma_i \in \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n'-1}\}$ 及び $\alpha \in B_{n'}$ が存在し、braid word $\alpha\sigma_i^2$ に対し $b' \stackrel{\text{B}}{=} \alpha\sigma_i^2$.

さらにこのとき、 $l(b') \leq l(b)$ である。

Proof. $b \in B_n^+$ の braid word を α とする。 α の weight に関する帰納法で示す。

α weight が 0 であるとき、 $b \stackrel{\text{B}}{=} 1$ である。 よって b は補題 3.20 を満たす。

$\alpha \neq 1$ とする。 α を $\sigma_{\lambda_1}\sigma_{\lambda_2}\cdots\sigma_{\lambda_m}$ とし、 $w_\alpha = k$ ($k \in \mathbb{Z}$) とする。 weight が $k-1$ 以下であるような任意の braid word が補題 3.20 を満たすと仮定する。 また、 $r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を

$$\begin{aligned} r &= \max\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}, \\ s &= \#\{j \in \{1, 2, \dots, m\} \mid \lambda_j = r\} \end{aligned}$$

とする。

$s = 1$ のとき、 braid word $\alpha_{r-1}, \alpha'_{r-1} \in B_{n, r-1}^+$ に対し

$$\sigma_{\lambda_1}\sigma_{\lambda_2}\cdots\sigma_{\lambda_m} = \alpha_{r-1}\sigma_r\alpha'_{r-1}$$

は b の braid word である。 $\alpha_{r-1}\sigma_r\alpha'_{r-1}$ は 共役をとることで $\alpha'_{r-1}\alpha_{r-1}\sigma_r$ と変形でき、 さらに安定化の逆をとることで $\alpha'_{r-1}\alpha_{r-1}$ と変形できる。 このとき、

$$\begin{aligned} w_{\alpha'_{r-1}\alpha_{r-1}} &= w_{\sigma_{\lambda_1}\sigma_{\lambda_2}\cdots\sigma_{\lambda_m}} - r \\ &= k - r \\ &\leq k - 1. \end{aligned}$$

よって、 b は補題 3.20 を満たす。

$s \geq 2$ のとき、 braid word $\alpha_r, \alpha'_r \in B_{n, r}^+$ 及び $\alpha_{r-1} \in B_{n, r-1}^+$ に対し、

$$\sigma_{\lambda_1}\sigma_{\lambda_2}\cdots\sigma_{\lambda_m} = \alpha_r\sigma_r\alpha_{r-1}\sigma_r\alpha'_r$$

と書ける。 補題 3.18 より、 $\sigma_j \in \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}\}$ 及び $\alpha, \alpha' \in B_{n, r}^+$ が存在し braid word $\alpha\sigma_j^2\alpha'$ に対し、

$$\sigma_r\alpha_{r-1}\sigma_r \stackrel{\text{B}}{=} \alpha\sigma_j^2\alpha'$$

であるか、 braid word $\alpha'' \in \mathfrak{B}_n^r$ が存在し

$$\sigma_r\alpha_{r-1}\sigma_r \stackrel{\text{B}}{=} \alpha'' \text{ かつ } w_{\alpha''} \leq w_{\sigma_r\alpha_{r-1}\sigma_r} - 1$$

である。 $\sigma_r\alpha_{r-1}\sigma_r \stackrel{\text{B}}{=} \alpha\sigma_j^2\alpha'$ のとき、

$$\alpha_r\sigma_r\alpha_{r-1}\sigma_r\alpha'_r \stackrel{\text{B}}{=} \alpha_r\alpha\sigma_j^2\alpha'\alpha'_r.$$

共役をとることで, $\alpha_r \alpha \sigma_j^2 \alpha' \alpha'_r$ は $\alpha' \alpha'_r \alpha_r \alpha \sigma_j^2$ と変形できる. このとき

$$l(\alpha' \alpha'_r \alpha_r \alpha \sigma_j^2) \leq l(b).$$

である. $\sigma_r \alpha_{r-1} \sigma_r \stackrel{B}{=} \alpha''$ かつ, $w_{\alpha''} \leq w_{\sigma_r \alpha_{r-1} \sigma_r} - 1$ のとき,

$$\alpha_r \sigma_r \alpha_{r-1} \sigma_r \alpha'_r \stackrel{B}{=} \alpha_r \alpha'' \alpha'_r.$$

さらにこのとき,

$$\begin{aligned} w_{\alpha_r \alpha'' \alpha'_r} &= w_{\alpha_r} + w_{\alpha''} + w_{\alpha'_r} \\ &\leq w_{\alpha_r} + w_{\sigma_r \alpha_{r-1} \sigma_r} - 1 + w_{\alpha'_r} \\ &= w_{\alpha_r \sigma_r \alpha_{r-1} \sigma_r \alpha'_r} - 1 \\ &= k - 1. \end{aligned}$$

よって $\alpha_r \alpha'' \alpha'_r$ は帰納法の仮定を満たし. b が補題 3.20 を満たすことがわかる. \square

定理 3.21. 任意の braid $b \in B_n$ は, 根が b でラベル付けされた invariant computation tree を持つ.

Proof. $b \in B_n$ の length に関する帰納法で示す. $b \in B_n$ に対し, $l(b) = 0$ とする. このとき $b \stackrel{B}{=} 1$ であり, b は 1 つのノードのみからなる invariant computation tree を持つ.

$k \in \mathbb{N}$ に対し, length が $k - 1$ 以下の任意の braid が定理 3.21 を満たすとする. また, $b \in B_n$ に対し $l(b) = k$ とする. このとき,

$$b = \sigma_{\lambda_1}^{\varepsilon_{\lambda_1}} \sigma_{\lambda_2}^{\varepsilon_{\lambda_2}} \cdots \sigma_{\lambda_k}^{\varepsilon_{\lambda_k}}$$

と書ける. ただし, $\lambda_i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$, $\varepsilon_{\lambda_i} = \pm 1$ である. また, $b_+ \in B_n^+$ を,

$$b_+ = \sigma_{\lambda_1} \sigma_{\lambda_2} \cdots \sigma_{\lambda_1}$$

とする.

補題 3.20 により b_+ は有限回の invariant Markov move で補題 3.20 の条件を満たす $b'_+ \in B_n^+$ に変換できる.

$b'_+ \stackrel{B}{=} 1$ のとき, b は 1 つのノードのみからなる invariant computation tree を持つ.

$\sigma_i \in \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n'-1}\}$ 及び $\alpha \in B_{n'}$ による braid word $\alpha \sigma_i^2$ に対し, $b'_+ \stackrel{B}{=} \alpha \sigma_i^2$ であるときを考える. 1 回の Conway split で $\alpha \sigma_i^2$ は $\alpha \sigma_i$ と $\alpha \sigma_i \sigma_i^{-1} = \alpha$ に分解できる.

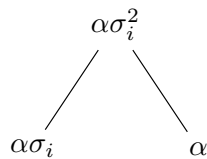


図 32 σ_i に 1 回の Conway split をしたときの invariant computation tree.

$\alpha\sigma_i, \alpha$ の length は

$$l(\alpha\sigma_i) \leq l(\alpha\sigma_i^2) - 1 \leq l(b) - 1 = k - 1,$$

$$l(\alpha) \leq l(\alpha\sigma_i^2) - 2 \leq l(b) - 2 = k - 2$$

であるから, $\alpha\sigma_i$ と α は仮定より invariant computation tree を持つ. よって, b_+ は定理 3.21 を満たす.

$s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を

$$s = \#\{i \in \{1, 2, \dots, k\} \mid \varepsilon_{\lambda_i} = -1\}$$

とする. $s = 0$ のとき $b = b^+$ であるから, b は invariant computation tree を持つ. $s \geq 1$ とし, 根が b でラベル付けされた computation tree を考える. ある $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ に対し,

$$b = \sigma_{\lambda_1}^{\varepsilon_{\lambda_1}} \cdots \sigma_{\lambda_{j-1}}^{\varepsilon_{\lambda_{j-1}}} \sigma_{\lambda_j}^{-1} \sigma_{\lambda_{j+1}}^{\varepsilon_{\lambda_{j+1}}} \cdots \sigma_{\lambda_k}^{\varepsilon_{\lambda_k}}$$

とし, 負の交差 $\sigma_{\lambda_j}^{-1}$ に対し Conway split を行うことで,

$$b_1 = \sigma_{\lambda_1}^{\varepsilon_{\lambda_1}} \cdots \sigma_{\lambda_{j-1}}^{\varepsilon_{\lambda_{j-1}}} \sigma_{\lambda_{j+1}}^{\varepsilon_{\lambda_{j+1}}} \cdots \sigma_{\lambda_k}^{\varepsilon_{\lambda_k}},$$

$$b'_1 = \sigma_{\lambda_1}^{\varepsilon_{\lambda_1}} \cdots \sigma_{\lambda_{j-1}}^{\varepsilon_{\lambda_{j-1}}} \sigma_{\lambda_j}^{\varepsilon_{\lambda_j}} \sigma_{\lambda_{j+1}}^{\varepsilon_{\lambda_{j+1}}} \cdots \sigma_{\lambda_k}^{\varepsilon_{\lambda_k}}$$

に対して図 33 の computation tree が書ける.

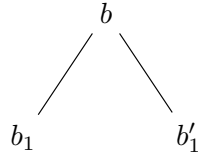


図 33 b に 1 回の Conway split をしたときの invariant computation tree.

同様に b'_1 の負の交差に Conway split を行う. この操作を s 回繰り返すことで, computation tree は図 34 のように書ける. 任意の $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ に対し $l(b_i) \leq k - 1$ であるから, 全ての b_i は invariant computataion tree を持つ. また, b'_s は b の全ての負の交差を正の交差にした braid であるから $b'_s = b_+$ であり, 先ほどの議論より b'_s もまた invariant computation tree を持つことがわかる.

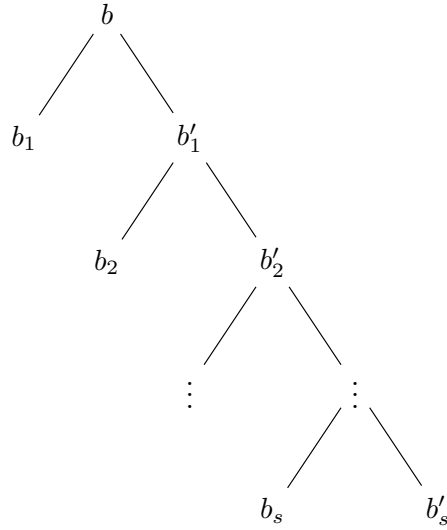


図 34 b_1, b_2, \dots, b_s は帰納法の仮定を満たす.

□

3.4 主定理とその証明

定理 3.22. 任意の braid $b \in B_n$ に対し多項式 $Q(s, t, u) \in \mathbb{Z}[s, t, u]$ が存在し,

$$P(b) = x^{n-c(b)-1} Q(y, y^{-1}, 1 + x^{-2})$$

が成り立つ.

Proof. γ_0 を根に持つ invariant computation tree Γ を考える. γ_0 は $b \in B_n$ でラベル付けされているとする. また, Γ の終端ノード全体の集合を T とする.

$\gamma \in T$ をラベル付けする自明な braid を 1_γ とする. また, 1_γ の strand の本数を $r(1_\gamma) \in \mathbb{N}$ とする. 1_γ の HOMFLY 多項式は

$$P(1_\gamma) = \left(-\frac{x + x^{-1}}{y} \right)^{r(1_\gamma)-1}.$$

補題 3.15 より,

$$\begin{aligned} n - c(b) &= \chi(b) \\ &= \chi(1_\gamma) + \deg_x R(\gamma) \\ &= r(1_\gamma) - 0 + \deg_x R(\gamma) \\ &= r(1_\gamma) + \deg_x R(\gamma). \end{aligned}$$

よって,

$$R(\gamma) = \pm y^{\deg_y R(\gamma)} x^{n-c(b)-r(1_\gamma)}.$$

両辺に $P(1_\gamma)$ をかけて,

$$\begin{aligned} R(\gamma)P(1_\gamma) &= \pm y^{\deg_y R(\gamma)} x^{n-c(b)-r(1_\gamma)} \left(-\frac{x+x^{-1}}{y} \right)^{r(1_\gamma)-1} \\ &= \pm y^{\deg_y R(\gamma)-r(1_\gamma)+1} x^{n-c(b)-1} x^{1-r(1_\gamma)} (-x-x^{-1})^{r(1_\gamma)-1} \\ &= \pm y^{\deg_y R(\gamma)-r(1_\gamma)+1} x^{n-c(b)-1} (1+x^{-2})^{r(1_\gamma)-1}. \end{aligned}$$

Invariant computation tree の性質より,

$$\begin{aligned} P(b) &= \sum_{\gamma \in T} R(\gamma)P(1_\gamma) \\ &= \sum_{\gamma \in T} \pm y^{\deg_y P(\gamma)-r(1_\gamma)+1} x^{n-c(b)-1} (1+x^{-2})^{r(1_\gamma)-1} \\ &= x^{n-c(b)-1} \sum_{\gamma \in T} \pm y^{\deg_y R(\gamma)-r(1_\gamma)+1} (1+x^{-2})^{r(1_\gamma)-1}. \end{aligned}$$

$\deg_y R(\gamma) - r(1_\gamma) + 1 \in \mathbb{Z}$, $r(b_\gamma) - 1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ であるから, よって条件を満たす多項式 $Q(s, t, u) \in \mathbb{Z}[s, t, u]$ が存在する. \square

定理 3.22 より, 次の 2 つの主結果を得る.

定理 3.23. 任意の braid $b \in B_n$ に対し $e_{\max}, e_{\min} \in \mathbb{Z}$ をそれぞれ $P(b)$ の x の最大次数と最小次数とする. このとき,

$$1 - n - c(b) \leq e_{\min} \leq e_{\max} \leq n - c(b) - 1$$

が成り立つ.

Proof. $e_{\min} \leq e_{\max}$ は明らかである.

$e_{\max} \leq n - c(b) - 1$ を示す. 定理 3.22 より, 任意の braid $b \in B_n$ に対し多項式 $Q(s, t, u) \in \mathbb{Z}[s, t, u]$ が存在して,

$$P(b) = x^{n-c(b)-1} Q(y, y^{-1}, 1+x^{-2})$$

と書けるから,

$$e_{\max} \leq n - c(b) - 1$$

である.

続いて, $1 - n - c(b) \leq e_{\min}$ を示す. 定理 3.22 の証明より,

$$P(b) = x^{n-c(b)-1} \sum_{\gamma \in T} \pm y^{\deg_y R(\gamma)-r(1_\gamma)+1} (1+x^{-2})^{r(1_\gamma)-1}$$

と書ける. 各記号は定理 3.22 の証明中と同様の意味である.

終端ノード $\gamma \in T$ と γ をラベル付けする 1_γ に対し, $r(1_\gamma)$ が最大となる終端ノードを γ' とする.

$$\begin{aligned} e_{\min} &\geq n - c(b) - 1 - 2r(1_{\gamma'}) + 2 \\ &= 1 - c(b) + n - 2r(1_{\gamma'}). \end{aligned}$$

$r(1_{\gamma'})$ は $1_{\gamma'}$ の strand の本数であったから,

$$\begin{aligned} r(1_{\gamma'}) &\leq n, \\ -n &\leq n - 2r(1_{\gamma'}). \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} e_{\min} &\geq 1 - c(b) + n - 2r(1_{\gamma'}) \\ &\geq 1 - c(b) - n. \end{aligned}$$

□

定理 3.24. Oriented link L の braid index を $\beta(L)$ とする. また, $e_{\max}, e_{\min} \in \mathbb{Z}$ をそれぞれ $P(L)$ の x の最大次数と最小次数とする. このとき,

$$1 + \frac{e_{\max} - e_{\min}}{2} \leq \beta(L)$$

が成り立つ.

Proof. Oriented link L と $b \in B_n$ に対し, $L \sim \widehat{b}$ とする. 定理 3.23 より,

$$1 - \beta(L) - c(b) \leq e_{\min} \leq e_{\max} \leq \beta(L) - c(b) - 1.$$

e_{\max} から e_{\min} を引いて,

$$e_{\max} - e_{\min} \leq 2\beta(L) - 2.$$

よって不等式

$$1 + \frac{e_{\max} - e_{\min}}{2} \leq \beta(L).$$

が得られる.

□

例 3.25. 例 3.4 より, figure-eight knot の HOMFLY 多項式は

$$P(4_1) = -x^2 - x^{-2} + y^2 - 1$$

であるから, 定理 3.24 の不等式は

$$1 + \frac{2 - (-2)}{2} = 3 \leq \beta(4_1).$$

例 2.21 より $\beta(4_1) \geq 3$ であるから, figure-eight knot の braid index は

$$\beta(4_1) = 3$$

とわかる.

次の例 3.26 のように, 定理 3.24 の不等式では最良に評価できない例が確認されている.

例 3.26. 結び目 9_{42} の braid index は 4 であることが知られている [6].

ここで, 結び目 9_{42} の HOMFLY 多項式は次の様になる [9].

$$P(9_{42}) = 2x^{-2} - 3 + 2x^2 + (x^{-2} - 4 + x^2)y^2 - y^4.$$

よって, 定理 3.24 の不等式は

$$1 + \frac{2 - (-2)}{2} = 3 \leq \beta(9_{42})$$

となり, 実際の braid index とギャップがあることがわかる.

結び目 9_{42} の他にも, 結び目 $9_{49}, 10_{132}, 10_{150}, 10_{156}$ が, 定理 3.24 の不等式と実際の braid index にギャップがある例として知られている [2]. 各結び目の HOMFLY 多項式は

$$\begin{aligned} &4x^6 - 3x^8 + (2x^4 + 6x^6 - 2x^8)y^2 + (x^4 + 2x^6)y^4, \\ &-2x^{-6} + 3x^{-4} + (-x^{-6} + 4x^{-4})y^2 + (x^{-4})y^4, \\ &2x^2 - x^4 + (3x^2 - 4x^4 + 2x^6)y^2 + (x^2 - 4x^4 + x^6)y^4 - x^4y^6, \\ &-x^{-4} + 2x^{-2} + (-2x^{-4} + 5x^{-2} - 2)y^2 + (-x^{-4} + 4x^{-2} - 1)y^4 + (x^{-2})y^6 \end{aligned}$$

となり [9], 定理 3.24 の不等式はそれぞれ

$$1 + \frac{8 - 4}{2} = 3 \leq \beta(9_{42}),$$

$$1 + \frac{-4 - (-6)}{2} = 2 \leq \beta(10_{132}),$$

$$1 + \frac{6 - 2}{2} = 3 \leq \beta(10_{150}),$$

$$1 + \frac{0 - (-4)}{2} = 3 \leq \beta(10_{156})$$

となる. 各結び目の braid index は,

$$\beta(9_{49}) = 4,$$

$$\beta(10_{132}) = 4,$$

$$\beta(10_{150}) = 4,$$

$$\beta(10_{156}) = 4$$

となり [9], ギャップがあることがわかる.

交差が 10 個以下の素な結び目は全てで 249 個あるが, 例 3.26 で紹介した 5 つの例外を除いて定理 3.24 の不等式は最良であることが知られている [6]. さらに, これらの例外に対しても [4] で改善が為されている. しかし, 依然として十分ではない例があるため, さらなる改良が期待される.

付録 A 命題 3.5 の証明

Proof. L を oriented link とする. また, $b_0 \in B_{n_0}$ を $\widehat{b_0} \sim L$ である braid とする. b_0 でラベル付けされたノード γ_0 を根とする第 m 層 ($m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) までの invariant computation tree Γ を考える. Γ の第 k 層 ($k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$) に着目し, k に関する後ろ向きの帰納法で示す.

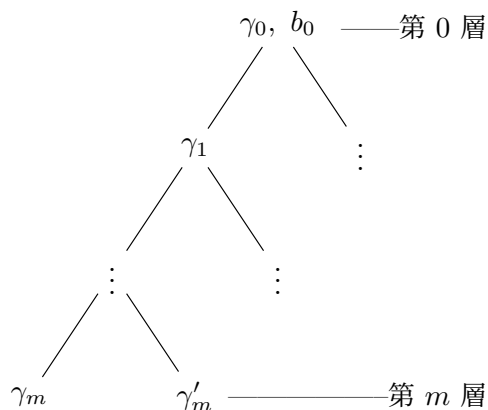


図 35 第 m 層までの invariant computation tree.

γ を第 k 層のノードとする. $k = m$ のとき, γ は終端ノードであるから自明な braid 1_γ でラベル付けされている. 1_γ に交差は無いから, 明らかに $P(1_\gamma)(x^{-1}, y) = P(1_\gamma^*)(x, y)$.

$k \neq m$ とする. γ が終端ノードのとき, $k = m$ のときと同様に $P(1_\gamma)(x^{-1}, y) = P(1_\gamma^*)(x, y)$. γ が終端ノードでないとし, $b \in B_n$ でラベル付けされているとする. また, $k+1$ 層の全てのノードで命題 3.5 が成り立つと仮定する. このとき, γ に対し $b_1 \in B_{n_1}, b_2 \in B_{n_2}$ でラベル付けされた 2 の子ノード γ', γ'' が存在し,

$$P(b)(x, y) = -x^{\pm 1}yP(b_1)(x, y) - x^{\pm 2}P(b_2)(x, y).$$

γ', γ'' は第 $k-1$ 層のノードであるから,

$$P(b_1)(x^{-1}, y) = P(b_1^*)(x, y), \quad P(b_2)(x^{-1}, y) = P(b_2^*)(x, y).$$

ただし, b_1, b_2 はそれぞれ b', b'' の全ての交差の上下を入れ替えた braid である. ここで,

$$\begin{aligned} P(b)(x^{-1}, y) &= -x^{\mp 1}yP(b_1)(x^{-1}, y) - x^{\mp 2}P(b_2)(x^{-1}, y) \\ &= -x^{\mp 1}yP(b_1^*)(x, y) - x^{\mp 2}P(b_2^*)(x, y) \\ &= P(b^*)(x, y) \end{aligned}$$

となり, よって b は命題 3.5 を満たす. □

参考文献

- [1] J. Franks and R. F. Williams, *Braids and the Jones polynomial*, Trans. Amer. Math. Soc., **303** (1987), no. 1, 97–108.
- [2] V. F. R. Jones, *Hecke algebra representations of braid groups and Link polynomials*, Ann. of Math. **126** (1987), no. 2, 335–388.
- [3] C. Kassel and V. Turaev, *Braid groups*, Grad. Texts in Math., 247, Springer, 2008.
- [4] K. Kawamuro, *Khovanov-Rozansky homology and the braid index of a knot*, Proc. Amer. Math. Soc., no. 7, **137** (2009), 2459–2469.
- [5] H. R. Morton, *Polynomials from braids*, Contemp. Math., **78** (1986), Amer. Math. Soc., 575–585.
- [6] K. Murasugi, *On closed 3-braids*, Mem. Amer. Math. Soc., **151**, 1974.
- [7] V. V. Prasolov and A. B. Sossinsky, *Knots, links, braids and 3-manifolds*, Transl. Math. Monogr., **154**, Amer. Math. Soc., 1997.
- [8] 村上齊, 結び目理論入門 (上), 岩波書店, 2019.
- [9] KnotInfo, <https://knotinfo.math.indiana.edu/>, (参照 2025-1-23).