

令和2年度卒業論文

交代絡み目の種数

広島大学理学部数学科

B183216 畑野 友明

指導教員 野崎 雄太

2022年2月17日

まえがき

日常生活において用いられる「結び目」という言葉のイメージは、おそらく図1のような、ひもを結んで作られるものことだと思われる。

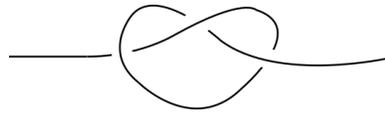


図 1: 一般的な結び目のイメージ

ただ、このような結び目は位相的観点から見れば(連続的な変形により移りあうものを同じとみなせば), 全て同一のものになってしまう(図2).



図 2: 連続的な変形

よって、このような観点において結び目にバリエーションを与えるためには、何らかの工夫が必要である。そこで結び目の両端をつなぎ合わせてみる(図3).

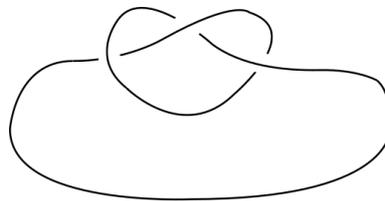


図 3: 両端をつないでできる結び目

すると得られる閉じた結び目の集合の中には、互いに移りあうことのできないものが存在する。この閉じた結び目を研究の対象とするのが結び目理論である。

一方の結び目が他方に連続的に変形されるとき、2つの結び目は同値であるという。このとき結び目が同値であることを示すのは容易である(具体的に写像を構成すればよい)。一方で、2つの結び目が同値でないことを示すのは、一般には困難である。この問題に対するアプローチとして導入されるのが結び目の不変量である。

結び目の不変量とは、各結び目に何らかの値 (数, 多項式, 群など) を対応させる写像であり, 同値な結び目には同じ値が割り当てられるよう定められたものである.

よって, 各結び目に対応する値を比較することで, 結び目の相違を判定することができる. 本論文では主に2つの不変量を取り扱う.

まず1つが結び目の種数である. 結び目の種数とは, ある1つの結び目に関して, その結び目を境界に持つ連結かつコンパクトな向き付き曲面 (これを Seifert 曲面という (図4)) 全体における, それらの種数の最小値のことである. ただし Seifert 曲面は1つの結び目に対して無数の取り方があるので, 一般に直接的な導出は困難である.

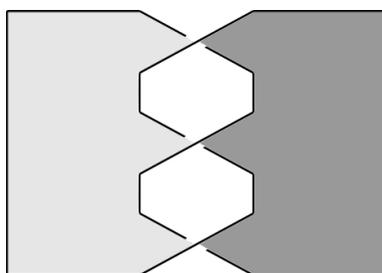


図4: 図3で表された結び目の Seifert 曲面

2つ目が Alexander 多項式である. Alexander 多項式は, 結び目の補空間の基本群 (結び目群という) の有限表示から得られる多項式であり, 機械的に計算可能である (図5).



図5: Alexander 多項式の例

ここで, 一方は純幾何学的な情報を表す値であり, 他方は代数的に得られる値であるが, この2つの不変量の間には一般の絡み目 (結び目を多成分に拡張したもの) に関して以下の関係が成り立つ事がよく知られている.

Fact. L を成分数 μ の絡み目とする. また $g(L)$ を L の種数, $\deg \Delta_L(t)$ を L の Alexander 多項式 $\Delta_L(t)$ の最大次数と最小次数の差とする. このとき不等式

$$\deg \Delta_L(t) \leq 2g(L) + \mu - 1$$

が成り立つ.

さらに対象を交代絡み目とよばれる特殊なものに限れば, 上述の定理の不等式に関して等号が成立する事が示される.

定理 ([1],[2]). 上の設定において, L を交代絡み目とする. このとき等式

$$\deg \Delta_L(t) = 2g(L) + \mu - 1$$

が成り立つ.

この定理は Crowell [1], および村杉 [2] により独立に証明が与えられている. 本論文は, この定理に関する Crowell の論文を解説するものである.

ここで類似の主張として, ファイバー絡み目とよばれる絡み目についても上述の等号が成立することがよく知られている. しかし, 図6の結び目 5_2 のように交代絡み目であるが, ファイバーでない例が存在するため, 本論文で示す定理は意義のあるものである.

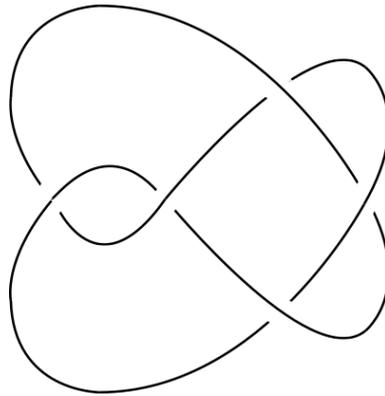


図 6: 結び目 5_2

本論文の構成は以下である. まず第1節では, 絡み目に関する基本的な定義の紹介, および Alexander 多項式の定義をする. 第2節では, 絡み目図式にグラフとしての解釈を与える. また行列木定理を用いることで, Alexander 多項式をグラフの言葉で表す. 第3節では, 本論文の主題の1つである結び目の種数を導入する. 第4節では, 実際に主定理を示していく. ここで Alexander 多項式のグラフによる表現が活用される. 第5節では, 本論文で証明した主定理の具体的な応用例を見ていく.

最後に, 本論文を執筆するにあたり, 指導教員である野崎雄太助教には終始丁寧なご指導を賜り, また私の稚拙な原稿に対し適切な助言を頂きました. 深く感謝し, お礼を申し上げます.

目次

1	準備	5
1.1	絡み目	5
1.2	Alexander 多項式	6
1.2.1	Wirtinger 表示	6
1.2.2	Fox の自由微分	7
1.2.3	Alexander 多項式の定義	8
2	グラフ理論	10
3	絡み目の種数	13
4	主定理の証明	16
4.1	グラフの分解	17
4.2	連結性と木構造	18
4.3	special-Seifert サーキット	19
4.4	補題 4.1 の証明	22
5	応用	30
5.1	トーラス結び目の交代性・非交代性	30
A	Alexander 多項式の幾何学的考察	34

1 準備

本節では主定理の理解のために、まず絡み目に関する基本的な概念を導入する。また絡み目の代表的な不変量として Alexander 多項式を導入する。

1.1 絡み目

定義 1.1. μ 個の区分的線型な、互いに交わらない単純閉曲線からなる S^3 の部分集合を、成分数 μ の絡み目という。特に成分数 1 の絡み目を結び目という (図 7)。また各成分に向きをつけたものを有向絡み目という。

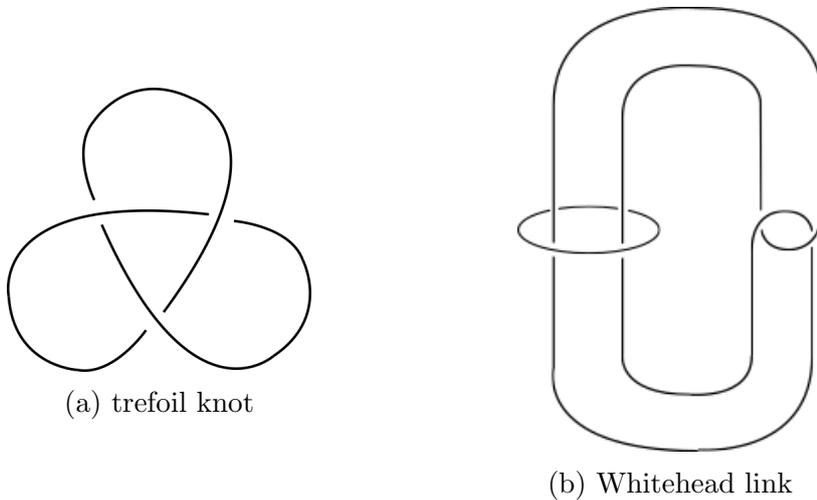


図 7: 絡み目の例

定義 1.2. L, L' をそれぞれ L_i, L'_i ($i = 1, \dots, \mu$) からなる有向絡み目とする。向きを保つ区分的線型な同相写像 $h: S^3 \rightarrow S^3$ で $h(L_i) = L'_i$ ($i = 1, \dots, \mu$) かつ各 $h|_{L_i}$ も向きを保つものが存在するとき、 L, L' は同値であるという。また、絡み目の同値類を絡み目型という。

以下、誤解が生じる場合を除き、絡み目型を単に絡み目とよぶ。

定義 1.3. L を絡み目とする。 $\infty \in S^3 \setminus L$ を 1 つ選ぶ。このとき、 \mathbb{R}^3 と $S^3 \setminus \{\infty\}$, および \mathbb{R}^2 と $S^2 \setminus \{\infty\}$ の同一視のもと、 $p(\infty) = \infty, p(x, y, z) = (x, y)$ で定義された射影 $p: S^3 \rightarrow S^2$ が次の 2 つの条件を満たすとき、射影 p は正則であるという。

(1) $p|_L$ は高々有限個の 2 重点 (このような点を交点という) を除き同相。

(2) 各交点 $p(a) = p(b)$ ($a, b \in L, a \neq b$) に関して, L は a, b の十分小さい近傍内で線形. (a, b のうち z 座標の大きい方を上交点, もう一方を下交点という.)

定義 1.4. 絡み目型が正則射影を持つ絡み目を含むとき **tame** であるという. また絡み目の正則射影による像 $p(L)$ が連結であるとき, その射影は連結であるという.

以下, 全ての絡み目射影は正則であるとし, また全ての絡み目型は tame であるとする.

定義 1.5. 連結な絡み目射影において, 絡み目を各成分に沿って動いたとき上交点および下交点が交互に現れるとき, その絡み目射影は代数的であるという. また, 代数的射影をもつ絡み目を交代絡み目という.

定義 1.6. 絡み目射影が連結かつ交点を持たないとき, 絡み目射影は自明であるといい, そうでないとき非自明であるという. (便宜上, 自明な射影は代数的であるとする.)

1.2 Alexander 多項式

1.2.1 Wirtinger 表示

定義 1.7. L を絡み目とする. L の補空間の基本群 $\pi_1(S^3 \setminus L)$ を L の絡み目群という.

絡み目群の表示は以下に示すように, 機械的に計算可能である.

L を有向絡み目とする. また p をその射影とする. p に関する下交点により, L は open な弧, および L の交点を含まない絡み目成分からなる集合 $\underline{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ に細分される. \underline{x} の元を上パスという. 各上パスの向きは L に従う. ここで上パスの数は交点の数 d を超えないことに注意.

つぎに各交点を $(1), \dots, (d)$ と番号付ける. 各交点 (i) ($i = 1, \dots, d$) はある 1 つの上パスに含まれる. この上パスを $x_{\nu(i)}$ と表す. さらに各 $i = 1, \dots, d$ に対して, 交点 (i) に隣接する 2 つの上パスで, $x_{\nu(i)}$ に沿って見たときに, 左 (右) に位置する上パスを $x_{\lambda(i)}(x_{\rho(i)})$ と表す (図 8).

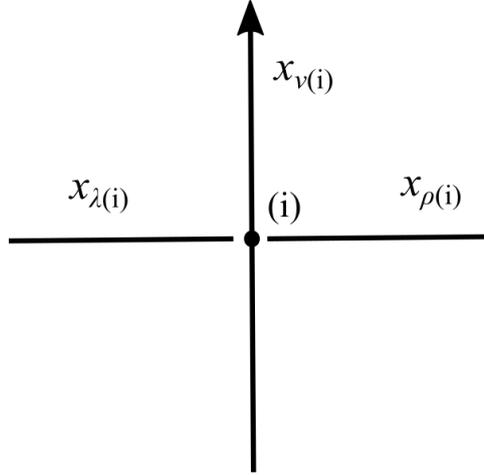


図 8: 交点と上パスの対応

$F(\underline{x})$ を \underline{x} により生成される自由群とする. また $F(\underline{x})$ の部分集合 $\underline{r} = \{r_1, \dots, r_n\}$ を

$$r_i = x_{\rho(i)} x_{\nu(i)} x_{\lambda(i)}^{-1} x_{\nu(i)}^{-1} \quad i = 1, \dots, d$$

で定義する.

このとき群表示 $\langle \underline{x} \mid \underline{r} \rangle$ は絡み目群 $\pi_1(S^3 \setminus L)$ の表示である. この表示を **Wirtinger 表示** という.

注意. 原著 [1] では生成元のループに関して左ねじの向きが用いられているが, 本論文では右ねじの向きを採用している. また, それに従い関係子の取り方も変更している.

1.2.2 Fox の自由微分

$F(\underline{x})$ を $\underline{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ により生成される自由群とする. また $\mathbb{Z}F(\underline{x})$ を $F(\underline{x})$ により生成される整数環 \mathbb{Z} 上の群環とする. このとき写像 $\frac{\partial}{\partial x_j} : \mathbb{Z}F(\underline{x}) \rightarrow \mathbb{Z}F(\underline{x})$, $j = 1, \dots, d$ を以下で定義する.

$$\begin{aligned}
(1) \quad & \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}, \\
(2) \quad & \frac{\partial x_i^{-1}}{\partial x_j} = -\delta_{ij}x_i^{-1}, \\
(3) \quad & \frac{\partial(uv)}{\partial x_j} = \frac{\partial u}{\partial x_j} + u \frac{\partial v}{\partial x_j}.
\end{aligned}$$

これを Fox の自由微分という.

1.2.3 Alexander 多項式の定義

$\langle t \rangle$ を t により生成される無限巡回乗法群とする. また, 準同型 $\theta : F(\underline{x}) \rightarrow \langle t \rangle$ を, $\theta(x_j) = t$ ($j = 1, \dots, n$) により定義する. この θ を線形に拡張することで群環上の準同型 $\hat{\theta} : \mathbb{Z}F(\underline{x}) \rightarrow \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ を得る.

$$A = (a_{ij}) = \left(\hat{\theta} \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right) \right) \in M_{d \times n}(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])$$

とする. A を Wirtinger 表示 $\langle \underline{x} \mid \underline{r} \rangle$ に関する Alexander 行列という.

Alexander 行列に関して, 次の命題が成り立つ..

命題 1.8. $A = (a_{ij})$ を Alexander 行列とする.

(1)

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = 0. \quad (i = 1, \dots, d)$$

(2) A の任意の行は, 他の行の線形結合としてあらわされる.

定義 1.9. L を絡み目とし, $\langle \underline{x} \mid \underline{r} \rangle$ をその絡み目群の Wirtinger 表示とする. また A を $\langle \underline{x} \mid \underline{r} \rangle$ に関する Alexander 行列とする. A の全ての $(n-1) \times (n-1)$ 小行列式の環 $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ における最大公約元を Wirtinger 表示 $\langle \underline{x} \mid \underline{r} \rangle$ に関する Alexander 多項式といい, $\Delta_L(t)$ と表す. (但し, $n > 1$ かつ $n-1 > d$ のとき $\Delta_L(t) = 0$, $n = 1$ のとき $\Delta_L(t) = 1$ と定める.)

注意. $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ は UFD なので, 単元 $\pm t^i$ 倍を法として上の定義は well-defined である. ($\pm t^i$ 倍を法として等しいことを \equiv で表す.)

命題 1.8 (1),(2) より, $n = d$ の場合 Alexander 多項式は以下のように容易に求められる.

命題 1.10. L を絡み目とし, $\langle x | r \rangle$ をその表示とする. また A を $\langle x | r \rangle$ に関する Alexander 行列とする. このとき, $1 < n = d$ ならば, $\Delta_L(t)$ は A の任意の $(n-1) \times (n-1)$ 小行列式と等しい.

Alexander 多項式は絡み目型に関する不変量である.

例 1.11. 具体的に 1 つ, 有向絡み目の Alexander 多項式を計算してみよう. L を以下のように向き付けられた trefoil とする. またその正則射影における交点, 上パスを図 9 のように番号づける.

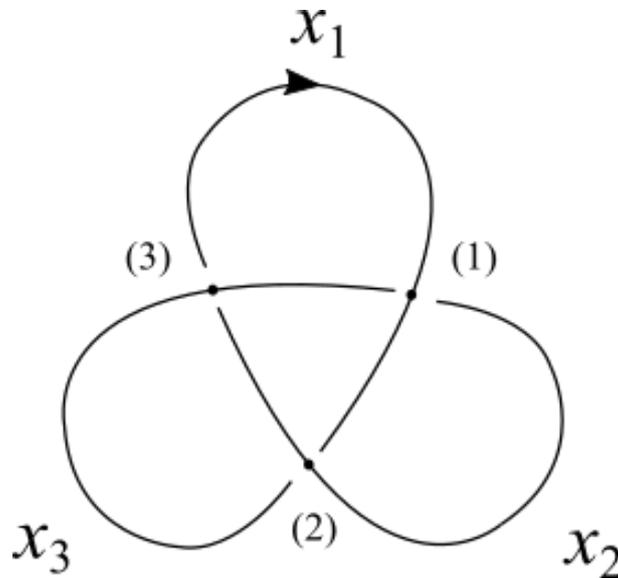


図 9: 辺および頂点に番号を付けた trefoil

このとき結び目群 $\pi_1(S^3 \setminus L)$ の Wirtinger 表示における関係子 $r_i (i = 1, 2, 3)$ は次のように与えられる :

$$\begin{aligned} r_1 &= x_3 x_1 x_2^{-1} x_1^{-1}, \\ r_2 &= x_1 x_2 x_3^{-1} x_2^{-1}, \\ r_3 &= x_2 x_3 x_1^{-1} x_3^{-1}. \end{aligned}$$

これらの x_1, x_2, x_3 に関する Fox 微分を定義に従って計算する. ここでは具

体的に $\frac{\partial r_1}{\partial x_1}$ の計算過程を追ってみよう.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial(x_3 x_1 x_2^{-1} x_1^{-1})}{\partial x_1} \\
&= \frac{\partial x_3}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial(x_1 x_2^{-1} x_1^{-1})}{\partial x_1} \\
&= x_3 \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial(x_2^{-1} x_1^{-1})}{\partial x_1} \right) \\
&= x_3 \left(1 + x_1 \left(\frac{\partial x_2^{-1}}{\partial x_1} + x_2^{-1} \frac{\partial x_1^{-1}}{\partial x_1} \right) \right) \\
&= x_3 (1 + x_1 (x_2^{-1} (-x_1^{-1}))) \\
&= x_3 - x_3 x_1 x_2^{-1} x_1^{-1}.
\end{aligned}$$

その他に関しても同様に計算できる. 以上を用いて Alexander 行列 $A = \left(\hat{\theta} \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right) \right)$ は以下のように求められる.

$$\begin{aligned}
A &= \left(\hat{\theta} \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right) \right) \\
&= \begin{pmatrix} t-1 & -t & 1 \\ 1 & t-1 & -t \\ -t & 1 & t-1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ここで交点と上パスの数が一致しているので, 命題 1.10 より L の Alexander 多項式は A の任意の $(n-1) \times (n-1)$ 小行列式として求められる. よって

$$\begin{aligned}
\Delta_L(t) &\doteq \det \begin{pmatrix} t-1 & -t \\ 1 & t-1 \end{pmatrix} \\
&= (t-1)^2 - (-t) \\
&= t^2 - t + 1.
\end{aligned}$$

2 グラフ理論

本節では絡み目の射影図に対して, 新たにグラフとしての解釈を与える. また前節で定めた Alexander 多項式をグラフの観点から考察していく.

L を絡み目, p を連結かつ非自明な L の交代的正則射影とする. このとき像 $P = p(L)$ は交点 $(1), \dots, (d)$ を頂点, 交点により P を細分して得られる弧を辺とみなすことでグラフとみなすことができる.

このグラフの各辺に、以下のようにして向き o , 重み α を定める.

各 $i = 1, \dots, d$ に対して, 頂点 (i) に隣接し, それぞれ $x_{\lambda(i)}, x_{\rho(i)}$ に含まれる 2 辺 e_1, e_2 が存在する. このとき各辺の重み α を

$$\alpha(e_1) = 1, \quad \alpha(e_2) = -t$$

と定める. (ここで $x_{\lambda(i)} = x_{\rho(i)}$ という状況も起こりえることに注意. この場合は e_1, e_2 のうち任意の一方に 1, もう一方に $-t$ を割り当てる.)

また辺 e_1, e_2 上の向き o を, 頂点 (i) が終点となるよう定める.

α, o が P の全ての辺に対して矛盾なく定まることは, 絡み目射影が交代のかつ非自明であることから容易にわかる. 向き o のことを交代的方向きという.

P の辺のうち, 向き o に関して $(i), (j)$ を始点, 終点とするもの全体の集合を E_{ij} と表す. このとき以下が成り立つ.

命題 2.1. 行列 $B = (b_{ij}) \in M_d(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])$ ($i, j = 1, \dots, d$) を以下で定義する.

$$b_{ij} = \sum_{e \in E_{ij}} \alpha(e), \quad i \neq j$$

$$b_{ii} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^d b_{ji}.$$

このとき B は絡み目射影に関する Alexander 行列の転置である.

よって命題 1.10 と合わせて Alexander 多項式は行列 B の小行列式として得られる.

行列 B の小行列式は, 次の行列木定理とよばれるグラフ理論における有名な定理から具体的に求めることができる.

定理 2.2. G を有向グラフ, $V = \{v_1, \dots, v_k\}$ をその頂点集合とする. また各辺 (v_i, v_j) に対して重み $-M_{ij} \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ が与えられており, これが全ての $j = 1, \dots, k$ に対して $\sum_i M_{ij} = 0$ を満たすとする. このとき, ある 1 つの頂点 v を根とする全域木全体にわたる, その木に属する辺の重みを掛け合わせたものの総和は, 行列 $M = (M_{ij})$ の任意の $(k-1) \times (k-1)$ 小行列式に等しい.

系 2.3. L を交代絡み目, p をその非自明な交代的射影とする. また $\text{Tr}(i)$ をグラフ $P = p(L)$ の部分グラフであり頂点 (i) を根とする全域木全体の集合とする. このとき L の Alexander 多項式 $\Delta_L(t)$ は次のように与えられる.

$$\Delta_L(t) \doteq \sum_{T \in \text{Tr}(i)} \prod_{e \in T} \alpha(e).$$

例 2.4. 系 2.3 で与えられた等式により Alexander 多項式が計算できることを実際に確認する. L を有向 trefoil とし, その正則射影を例 1.11 で定められたものとする. この射影から得られるグラフ P には図 10 のように重み α , 交代的向き o が与えられる.

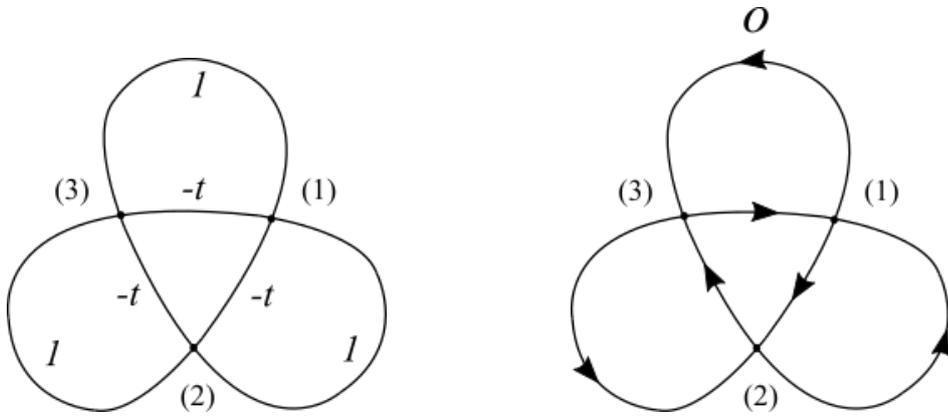


図 10: 図 3 の trefoil に重み α , 向き o を与えたもの

頂点 (1) を根とするグラフ (P, o) の全域木は以下の 3 つである (図 11).

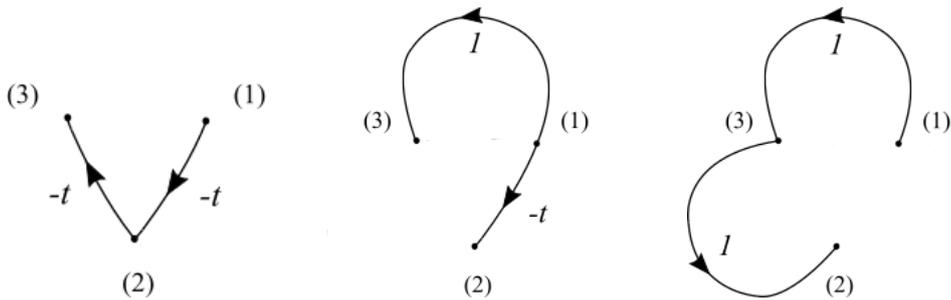


図 11: (1) を根とする全ての全域木

よって各全域木に含まれる辺の重みを掛け合わせて, その総和をとることで Alexander 多項式が得られる.

$$\begin{aligned}\Delta_L(t) &\doteq (-t) \cdot (-t) + (-t) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ &= t^2 - t + 1.\end{aligned}$$

これは例 1.11 で求めたものと一致している.

系 2.3 により, 交代絡み目の Alexander 多項式をグラフの言葉で表すことができた. この表し方から, 次の興味深い事実が示される.

系 2.5. 多項式 $\sum a_i t^i \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ が任意の i, j に対して $(-1)^{i+j} a_i a_j \geq 0$ を満たすとき, 交代的であると定義する. このとき交代絡み目の Alexander 多項式は交代的である.

証明. 系 2.3 における等式のうち $\prod_{e \in T} \alpha(e)$ の部分は $(-t)^{\text{char}(T)}$ と表わせる. よって, 交代絡み目の Alexander 多項式における t^i の係数 a_i は $(-1)^i |a_i|$ と表わせる. よって, 任意の i, j に関して $(-1)^{i+j} a_i a_j = (-1)^{2(i+j)} |a_i| |a_j| \geq 0$ が成り立つ. \square

3 絡み目の種数

本節では結び目理論の重要な概念の一つである Seifert 曲面を導入する. この曲面から得られる結び目の種数こそが, 本論文における主定理の中核をなす概念である.

定義 3.1. L を有向絡み目とする. コンパクトかつ連結な向き付けられた曲面 F が向きを含めて $\partial F = L$ を満たすとき, F を L の **Seifert 曲面** という. また L の Seifert 曲面の種数のうち最小のものを L の **種数** といい $g(L) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ で表す.

p を有向絡み目 L の連結かつ非自明な射影とする. またグラフ $P = p(L)$ の向きは元の絡み目の向きに従うとする. (これを “絡み目向き” といい, O で表す.)

定義 3.2. P の部分グラフ C が以下を満たすとき **Seifert サーキット** という.

- (1) C は長さ $n \geq 1$ のサイクル.
- (2) C は向き O に関して有向サイクルをなす.
- (3) $p^{-1}(C) \cap L$ は n 個の連結成分からなる.

Seifert サーキットは次のように特徴づけられる.

グラフ P をある頂点から出発し, 頂点に達するたびに向き O に従って左右のいずれかに曲がる. これは P の Seifert サーキットを描く. 逆に任意の Seifert サーキットはこのルールに従い辿ることができる.

よって次の命題が成り立つ.

命題 3.3. P の全ての辺はそれぞれ唯一つの Seifert サーキットに属する.

L の Seifert 曲面は P の Seifert サーキット C_1, \dots, C_f を 2セルで埋めることで構成される.

以下の構成法を **Seifert のアルゴリズム** という.

それぞれ d 個の上交点および下交点の十分小さい近傍において L は線形である. これら $2d$ 個の点の L における連結かつ線形な開近傍をとる. つぎに各交点に関して, 上交点および下交点の近傍の 4 つの端点を 2 つの線分でつなぎ合わせる. (ここでつなぎ方は 2 通りあるが, 端点の射影 p による像が同一の Seifert サーキットに属するように選ぶ.) このような操作を平滑化という (図 12).

L' を L から上の $2d$ 個の近傍を除き, 線分を付け加えてできる絡み目とする. このとき L' は f 個の成分 L'_1, \dots, L'_f からなる自明な絡み目である. (各成分は Seifert サーキットに対応する.)

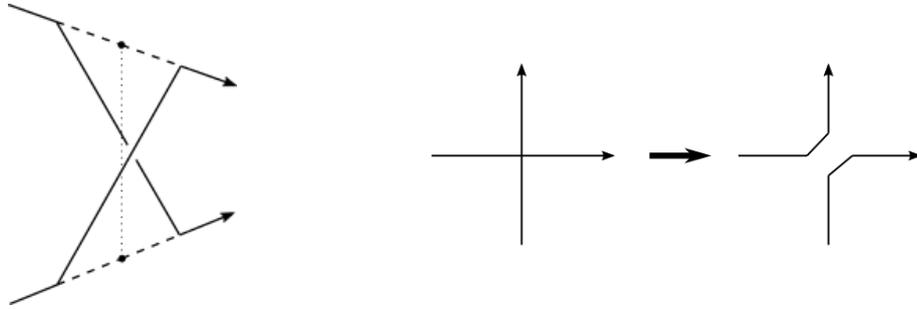


図 12: 平滑化の様子

つぎに z 座標に関して L の下にある f 個の異なる平面 $z = z_i$ ($i = 1, \dots, f$) を

$$\mathbb{R}^2 \text{ において } p(L_j) \text{ が } p(L'_i) \text{ の内部に含まれる} \implies z_i < z_j$$

をみたくようにとる. このとき射影 $p_i(x, y, z) = (x, y, z_i)$ による像 $p_i(L'_i)$ は単

純閉曲線である. またその内部の2セルを D_i とする. また open な2セル E_i を

$$E_i = D_i \cup \{(x, y, z) \mid \text{ある } (x, y, \bar{z}) \in L'_i \text{ が存在し, } z_i \leq z < \bar{z}\}$$

で定義する.

最後に, 各交点における, 上交点及び下交点の線形近傍と近傍の端点を結ぶ2つの線分を境界とする2セル F_i をとる.

このとき

$$S = L \cup L' \cup \bigcup_{i=1}^f E_i \cup \bigcup_{i=1}^d F_i$$

は L を境界に持つ曲面である.

また S の各2セルは同調して向き付けられており, 境界の和は向きを含めて L と一致しているので S は向き付け可能である. 連結性は明らか. よって S は L の Seifert 曲面である.

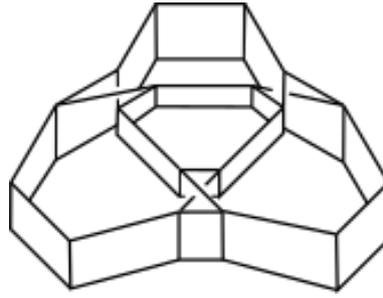


図 13: Seifert アルゴリズムにより得られる trefoil の Seifert 曲面

Seifert のアルゴリズムにおいて, S は $f + d$ 個の2セル, $(2d + 4d)$ 個の辺 (1セル), $4d$ 個の頂点 (0セル) からなる. よって Euler-Poincaré の公式より

$$\begin{aligned} \chi(S) &= (f + d) - (2d + 4d) + 4d \\ &= f - d \end{aligned}$$

が成り立つ. よって $\chi(S)$ の定義と合わせて, 以下の命題が成り立つ.

命題 3.4. L を成分数 μ の有向絡み目とする. またグラフ $P = p(L)$ の頂点の数を d , Seifert サーキットの数を f とする. また S を Seifert のアルゴリズムにより P から得られる L の Seifert 曲面とする. このとき S の種数 $g(S)$ に関して次の等式が成り立つ.

$$2g(S) + \mu - 1 = d - f + 1.$$

定義 3.5. L を有向絡み目とする. $\Delta_L(t)$ の t に関する最大次数および最小次数の差を $\Delta_L(t)$ の次数といい, $\deg \Delta_L(t)$ と表す.

Alexander 多項式の次数に関して, 序文で述べたように以下の関係が成り立つことが知られている.

Fact ([3, Proposition 6.13]). L を成分数 μ の有向絡み目とする. このとき以下の不等式が成り立つ.

$$\deg \Delta_L(t) \leq 2g(L) + \mu - 1.$$

また定義より $g(L) \leq g(S)$ であるので命題 3.4 と合わせて以下が成り立つ.

$$\deg \Delta_L(t) \leq d + f - 1.$$

以上の結果は一般の絡み目に関して成り立つ. 一方, 対象を非自明な交代絡み目に絞れば, その Alexander 多項式 $\Delta_L(t)$ に対して $\deg \Delta_L(t) \geq d + f - 1$ が成り立つことがわかる. よって本論文の主定理である以下の定理が得られる.

定理 3.6. L を成分数 μ の交代絡み目とする. このとき種数 $g(L)$ に関して以下が成り立つ.

$$\deg \Delta_L(t) = 2g(L) + \mu - 1.$$

さらにこのことから, 非自明な交代絡み目射影に対し, Seifert のアルゴリズムにより構成される Seifert 曲面の種数は最小種数であることがわかる.

4 主定理の証明

これまで主定理の証明に必要な道具を準備してきた. 本節では実際に主定理に証明を与えていく.

この節を通して, L は非自明な交代絡み目とし, P をその交代的射影から得られるグラフとする. また P の頂点の数を d , Seifert サーキットの数を f とする. この P には前節と同様に, 絡み目向き O , 交代的向き o , 重み α を定めることができる.

主定理を示すにあたり, 以下の補題が必要であった.

補題 4.1. $\deg \Delta_L(t) \geq d - f + 1$.

よって, この不等式の証明が本節の主な目的である.

4.1 グラフの分解

グラフ P を共通の辺を持たない二つの部分グラフ H, K に, 以下のように分解する.

$$H = P \setminus \alpha^{-1}(-t),$$

$$K = P \setminus \alpha^{-1}(1).$$

ここで H, K はそれぞれ, P の全ての頂点および重み $1, -t$ の辺から成る部分グラフである. 例として trefoil グラフの分解を図 14 に示す.

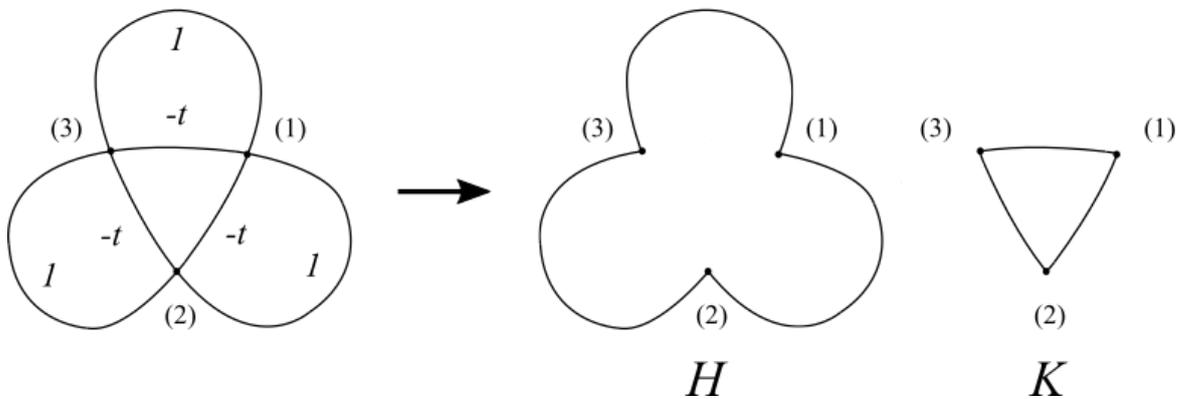


図 14: trefoil グラフの分解

この二つの部分グラフは, 重み α の定義による以下の重要な性質を持つ.

命題 4.2. P の部分グラフ H, K は向き o に関して共通の終点を持つ辺を含まない.

このことから H, K のサイクルは向き o に関して有向サイクルをなす. また各頂点に対し, そこに入る H, K の辺がそれぞれ唯一つ存在する. したがって以下が成り立つ.

命題 4.3. H, K の辺の数および頂点の数は全て等しく, それぞれ d 個ある.

系 4.4. H, K の全ての連結成分は, 唯一つサイクルを含む.

証明. Euler-Poincaré の公式を命題 4.3 に適用することで $\chi(H) = 0$ であることがわかる. 一方グラフを CW 複体とみなし Euler 標数の定義に立ち返ることで $\chi(H) = (\text{サイクルの数}) - (\text{連結成分の数})$ がいえる. よってサイクルの数と連結成分の数は一致する.

ここでサイクルを含まない連結成分が存在すると仮定する. このとき H の辺で, その始点を終点とする別の辺が存在しないものがある. この点はグラフ K の 2 辺の共通の終点となり命題 4.2 に反する. \square

4.2 連結性と木構造

定義 4.5. 有向グラフ (P, o) の根付き木 T の辺のうち部分グラフ K に含まれるものの数を T の **characteristic** といい $\text{char}(T)$ で表す. (ここで有向グラフにおける根付き木とは, 根とよばれる 1 つの頂点から木の全ての頂点への有向パスが存在するようなものをいう.)

本節の主題である補題 4.1 の証明であるが, これは系 2.3 より (P, o) における characteristic の十分大きい (小さい) 全域木の存在性の証明に還元される.

ここでまず問題となるのが (P, o) における全域木の存在性である. 全域木の存在に関しては, 任意の 2 頂点の間に有向パスが存在するグラフ (このようなグラフを強連結という) において以下が成り立つ.

命題 4.6. 強連結なグラフ G の任意の根付き木は, 同じ頂点を根とする G の全域木に拡張できる.

証明. G の根付き木 T を任意にとる. また T に含まれない点 v を 1 つ選ぶ. G は強連結なので, T の根 r を始点とし, v を終点とする有向パス $v_0v_1 \cdots v_n$ ($v_0 = r, v_n = v$) が存在する. この有向パスの頂点のうち T に含まれるもので, 添え字が最大のものを v_m とする. このとき $v_0v_1 \cdots v_n$ に含まれる, v_m から v への有向パスを T に付け加え新たに T とする. これを繰り返すことで G の全域木 T が構成される. \square

よって, 特に任意の強連結なグラフ G に関して任意に与えられた頂点を根とする G の根付き全域木が存在する.

命題 4.7. グラフ (P, o) は強連結.

証明. グラフ P は連結なので, 任意の頂点 u, v に対して 2 点間を結ぶパス $v_0v_1 \cdots v_n$ ($v_0 = u, v_n = v$) が存在する. ここで u, v 間の有向パスが構成できることを, $v_0v_1 \cdots v_n$ のうち (P, o) の有向辺でない辺の数 n_r に関する数学的帰納法を用いて示す. $n_r = 0$ の場合は $v_0v_1 \cdots v_n$ は u, v 間の有向パスである. 今 $n_r < k$ の場合, 有向パスが構成できると仮定する. $n_r = k$ とする. ここで辺 (v_i, v_{i+1}) が有向辺としては (P, o) に含まれない場合を考える. S^2 を P で分割して得られる領

域のうち、辺 (v_i, v_{i+1}) を境界に含むものを選ぶ. このような領域の境界は向き o に関して有向サイクルをなす. このサイクルの頂点のうち $\{v_0, \dots, v_n\}$ に含まれるもので添え字が最大, 最小のものをそれぞれ v_{\max}, v_{\min} とする. ここで v_{\min} を始点, v_{\max} を終点とするサイクルに沿ったパスで $v_0 v_1 \dots v_n$ 内の $v_{\min} \dots v_{\max}$ を置き換える (図 15). このとき新たに得られたパスのうち, (P, o) の有向辺でない辺の数は k より少ない. よって, 帰納法の仮定より u, v 間に有向パスを構成できる. \square

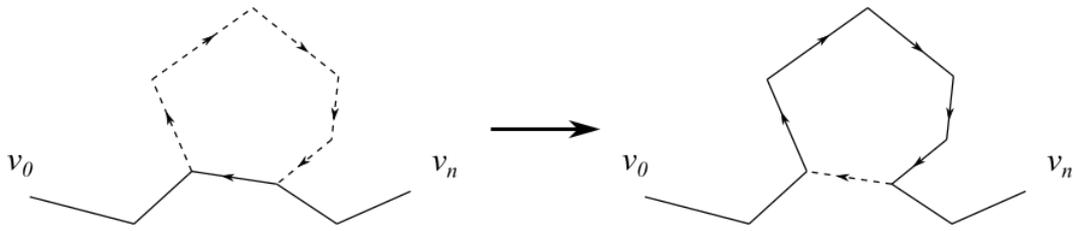


図 15: パスのサイクルによる置き換え

以上のことからグラフ (P, o) における全域木の存在が示せた.

4.3 special-Seifert サーキット

定義 4.8. C をグラフ P の Seifert サーキットとする. $S^2 \setminus C$ の 2 つの領域のうち一方が P の辺および頂点を含まないとき, C は **special** であるという.

ここで P の Seifert サーキット全体の集合を \mathcal{F} , special な Seifert サーキット全体の集合を \mathcal{F}_s で表す. また任意の有向グラフ (G, ω) に関して, 向き ω に関する有向サイクル全体の集合を $\mathcal{C}(G, \omega)$ で表す. このとき以下が成り立つ.

命題 4.9. (i) $\mathcal{F} = \mathcal{C}(P, o) \cap \mathcal{C}(P, O)$, (ii) $\mathcal{F}_s = \mathcal{C}(H, o) \cup \mathcal{C}(K, o)$.

証明. (i) まず $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(P, o) \cap \mathcal{C}(P, O)$ を示す. 定義より Seifert サーキットは向き O に関して有向サイクルをなす. また Seifert サーキットの特徴付けとして, 各頂点で左右のいずれかに曲がるが, これは向き o の定義により有向サイクルをなす.

次に $\mathcal{F} \supset \mathcal{C}(P, o) \cap \mathcal{C}(P, O)$ を示す. $C \in \mathcal{C}(P, o) \cap \mathcal{C}(P, O)$ を任意にとる. $C \in \mathcal{C}(P, O)$ より, Seifert サーキットの定義 (1), (2) を満たすことは明らか. また向き o の定義より, C の隣り合う 2 辺の射影 p による逆像はそれぞれ頂点を含めて異なる上パスに含まれる. よって (3) を満たす.

(ii) $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{C}(H, o) \cup \mathcal{C}(K, o)$ を示す. $C \in \mathcal{F}_s$ を任意にとる. ここで P のループ (1 頂点および 1 辺から成る部分グラフ) はすべて \mathcal{F}_s と $\mathcal{C}(H, o) \cup \mathcal{C}(K, o)$ に含まれるので, 以下 C は少なくとも 2 辺を含むと仮定する.

C の隣接する 2 頂点の周辺を観察する. これらの頂点に接続されている辺の配置は図 16 のようになっている.

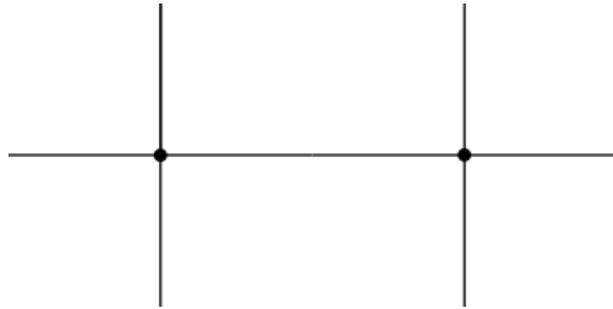


図 16: 隣接する 2 頂点に接続された辺の配置

これらは元の絡み目射影図において 3 本のひもが重なり合っているものなので, 考えられる絡み目向き O は $2^3 = 8$ 通り存在する. しかし C は special であるので, 一方の頂点の周りの向きを決めれば残りの辺の向きは自動的に決まる. よって図 17 の 4 つが可能な配置である.

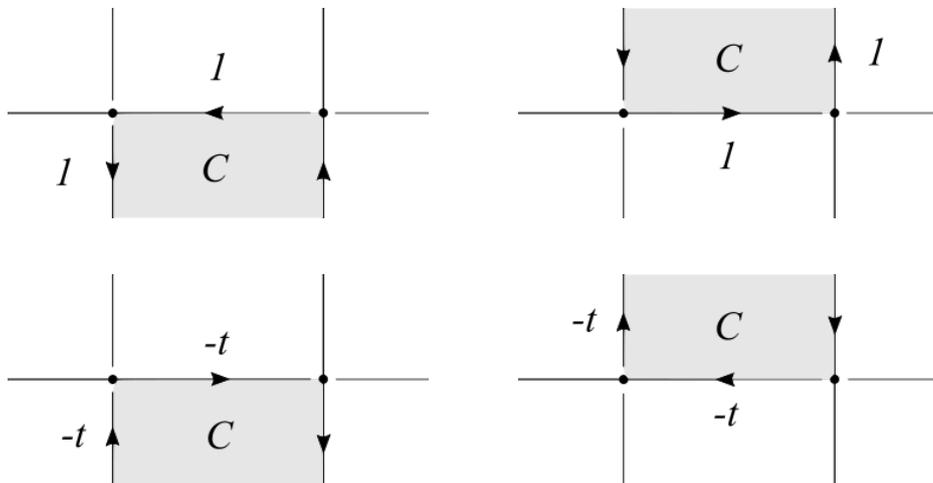


図 17: 可能な絡み目向き O の配置

以上からわかるように C の隣接する 2 辺は, ともに H または K に含まれる. また向き o に関して有向サイクルをなすことは (i) よりわかる.

次に $\mathcal{F}_s \supset \mathcal{C}(H, o) \cup \mathcal{C}(K, o)$ を示す. $C \in \mathcal{C}(H, o)$ を任意にとる. $S^2 \setminus C$ の 2 領域をそれぞれ A, B と表す. (ここで A は向き o に対して左に位置するものとする.) 頂点 $v \in C$ を任意にとる. また o に関して v を終点とする辺を e , e の始点を u とする. ここで先ほどと同様に, C は少なくとも 2 辺を含むと仮定してよいので $u \neq v$ である.

今, u, v に接続されている辺に対して向き o は図 18 のように与えられている.

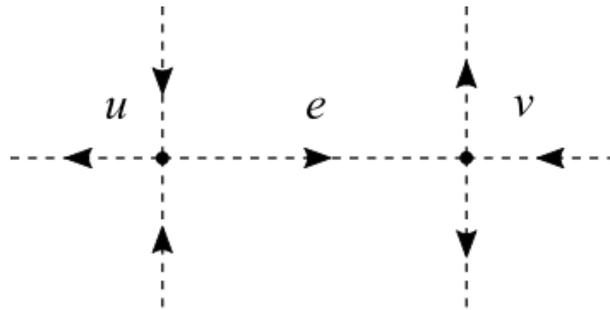


図 18: 交代的向き o に関する有向辺

よって, このうち C に含まれる辺の取り方は図 19 の 4 通りである.

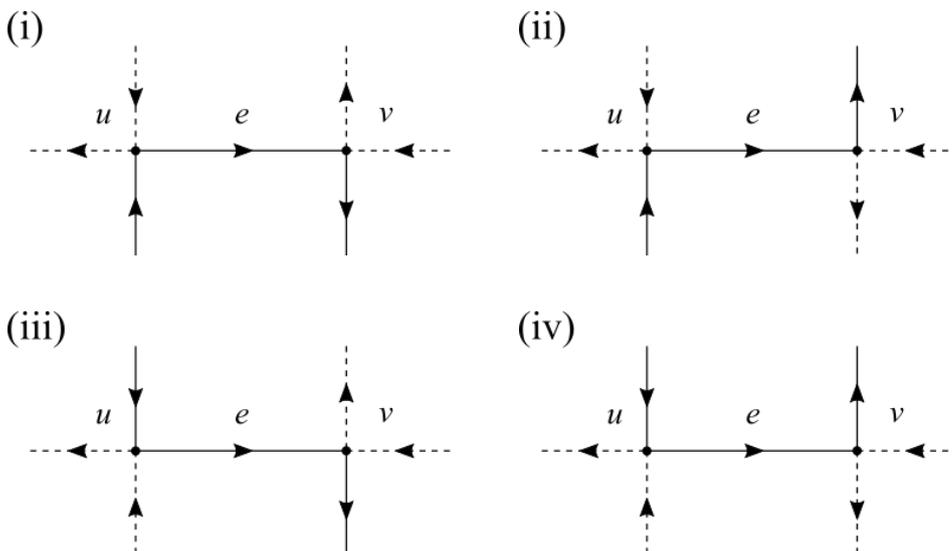


図 19: C に含まれる辺の可能な取り方

これらに対して, H の定義をもとに, 頂点 v に接続されている辺における絡み目向き O がわかる (図 20).

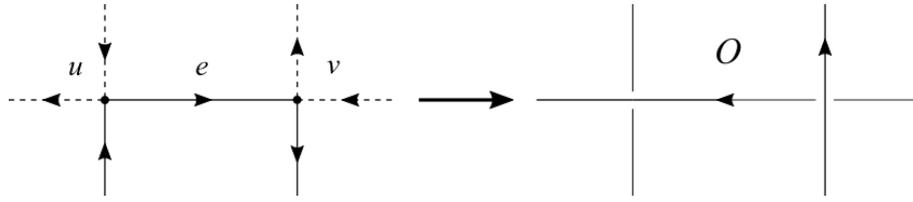


図 20: (i) の場合における C の配置から得られる絡み目向き O

ここで以下に注意する.

Claim. 絡み目向き O に関して, C 上に始点を持つ $A(B)$ の内部の辺の数は, C 上に終点を持つ辺の数と等しい.

(i), (iv) の場合, v を始点とする辺と終点とする $A(B)$ の内部の辺が 1 つずつ存在する. 一方で (ii) の場合, v を終点とする B の内部の辺が 2 つ, (iii) の場合, v を始点とする A の内部の辺が 2 つ存在する (図 21).

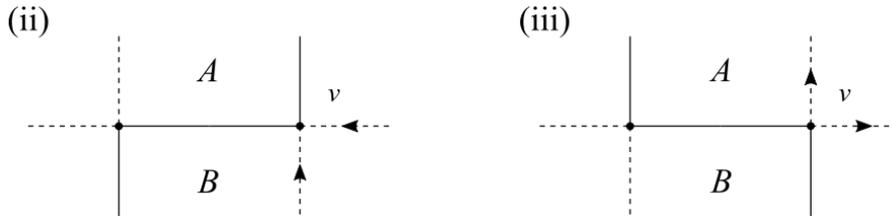


図 21: C 上に終点を持つ O に関する有向辺

今, v は任意であったので, C の中に (ii), (iii) のパターンが現れると辺の数が合わないこととなり, 補題 4.10 に反する.

よって C は「全ての頂点において左に曲がる」, もしくは「全ての頂点において右に曲がる」. すなわち A, B のいずれかは P を含まず, C は向き O に関して有向サイクルをなす. よって $C \in \mathcal{F}_s$.

同様の議論が $C \in \mathcal{C}(K, o)$ についても成り立つ. □

4.4 補題 4.1 の証明

前述したように, 補題 4.1 の証明に関して問題となるのはグラフ (P, o) における全域木の characteristic であった. これに関する命題として以下が成り立つ.

命題 4.10. グラフ P の Seifert サーキットは全て special であるとする. このとき任意の P の頂点 v に関して, v を根とする (P, o) の根付き全域木 $T(H), T(K)$

が存在し, 以下を満たす.

$T(H)$ は $d - b_1(H)$ 個の H の辺を含む,

$T(K)$ は $d - b_1(K)$ 個の K の辺を含む.

ここでグラフ G に関して, $b_1(G) = \text{rank } H_1(G; \mathbb{Z})$ とする.

証明. $T(H)$ の存在を示す. P の頂点 v を任意にとる. まず H の全ての辺が H のサイクルに含まれることを確認する. 命題 3.3 より P の全ての辺は, ある Seifert サーキットに属する. ここで仮定より全ての Seifert サーキットは special であるが, これは命題 4.9(ii) より H または K のサイクルと一致する. よって H の全ての辺は H のサイクルに属する.

次に具体的に P の全域木を構成するために, P から新たなグラフを構成する. H の各サイクルは special であるので, $S^2 \setminus P$ の領域のうち 1 つの境界をなす. これらの領域の閉包を 1 点につぶすことで新たな球面グラフ P' を構成する. グラフ P' の向きは o に従うとする. P' の任意の 2 頂点に関して, それらに対応する P の 2 頂点間には有向パスが存在する. この有向パスのうち H のサイクルに含まれる辺を縮めることで P' における有向パスを構成できる. よって P' は向き o に関して強連結である. よって命題 4.6 より v' を根とする (P', o) の根付き全域木 T' が存在する. (ここで v' は v を境界に含む領域を圧縮してできた点.)

ここで, T' のうち圧縮してできた点を H のサイクルで置き換え, P の部分グラフとして見る. この部分グラフのうち H の各サイクルから適当な辺を 1 つずつ取り除けば, P の全域木 $T(H)$ が構成できる (図 22).

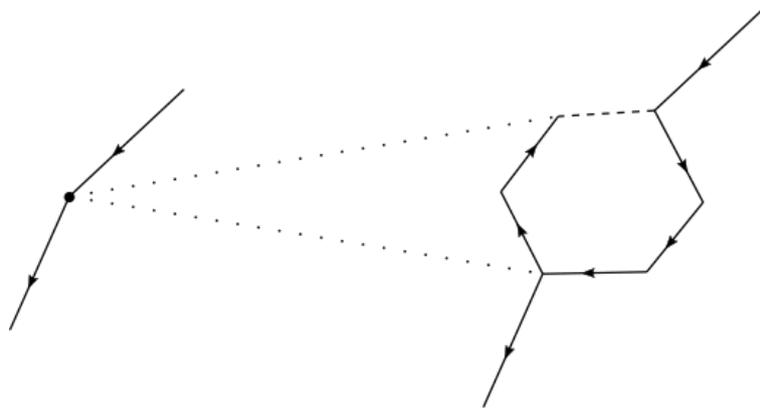


図 22: 圧縮されたサイクルの復元

ここで上述の通り H の全ての辺は H のサイクルに属するので, $T(H)$ は H の辺を $(H$ の辺の総数) $-$ $(H$ のサイクルの数), すなわち $d - b_1(H)$ 個含む. $T(K)$ についても同様のことがいえる. \square

命題 4.10 は頂点に関する条件を緩めることで以下のように一般化できる.

命題 4.11. $N \geq 0$ を special でない Seifert サーキットの数とする. このときある P の頂点 v に関して, v を根とする (P, o) の全域木 $T(H), T(K)$ および非負整数 h, k が存在し以下を満たす.

$$\begin{aligned} T(H) & \text{は少なくとも } d - b_1(H) - h \text{ 個の } H \text{ の辺を含む,} \\ T(K) & \text{は少なくとも } d - b_1(K) - k \text{ 個の } K \text{ の辺を含む,} \\ N & = h + k. \end{aligned}$$

この命題に関するより強い主張として, 「ある P の頂点 v 」を「任意の P の頂点 v 」に変更したものを考える. (これを命題 4.11 の Strong form とよぶことにする.) このとき以下が成り立つ.

命題 4.12. 以下は同値.

(i) 命題 4.11, (ii) 補題 4.1, (iii) 命題 4.11 の Strong form.

証明. (i) \Rightarrow (ii) を示す. P の任意の全域木は $d - 1$ 個の辺からなるので,

$$\begin{aligned} \text{char } T(H) & \leq (d - 1) - (d - b_1(H) - h) = b_1(H) + h - 1, \\ \text{char } T(K) & \geq d - b_1(K) - k \end{aligned}$$

が成り立つ. したがって

$$\begin{aligned} \text{char } T(K) - \text{char } T(H) & \geq d - (b_1(H) + b_1(K) + h + k) + 1 \\ & = d - (b_1(H) + b_1(K) + N) + 1 \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで命題 4.8(ii) および N の定義より $f = b_1(H) + b_1(K) + N$ であること, そして系 2.3 より Alexander 多項式の次数は (P, o) の全域木の characteristic の最大値と最小値の差であることを合わせて以下を得る.

$$\begin{aligned} \deg \Delta_L(t) & \geq |\text{char } T(K) - \text{char } T(H)| \\ & \geq d - f + 1. \end{aligned}$$

次に (ii) \Rightarrow (iii) を示す. P の頂点 v を任意にとる. また $T(H), T(K)$ を v を根とする (P, o) の全域木で characteristic が最大, 最小のものであるとする. このとき仮定より

$$\begin{aligned} \deg \Delta_L(t) & = \text{char } T(K) - \text{char } T(H) \\ & \geq d - f + 1 \end{aligned}$$

が成り立つ. 木はサイクルを含まないので

$$\begin{aligned}(T(H) \cap H \text{ の辺の数}) &\leq d - b_1(H), \\ (T(K) \cap K \text{ の辺の数}) &\leq d - b_1(K)\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで各不等式の両辺は整数のため非負整数 m, n が存在し以下を満たす.

$$\begin{aligned}(T(H) \cap H \text{ の辺の数}) &= d - b_1(H) - m, \\ (T(K) \cap K \text{ の辺の数}) &= d - b_1(K) - n.\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\text{char } T(K) - \text{char } T(H) &= d - b_1(K) - n - ((d - 1) - (d - b_1(H) - m)) \\ &= d - b_1(K) - n - (b_1(H) + m - 1) \\ &= d - (b_1(H) + b_1(K)) - m - n - 1 \\ &= d - f - 1 + (N - m - n)\end{aligned}$$

が成り立つ. よって $\text{char } T(K) - \text{char } T(H) \geq d - f + 1$ と合わせて $N \geq m + n$ を得る. ここで $N = h + k, h \geq m, k \geq n$ を満たす非負整数 h, k を選べば (iii) を満たす.

(iii) \Rightarrow (i) は明らか. □

以上を用いて命題 4.11 を示す.

証明. special でない Seifert サーキットの数 N に関する数学的帰納法により示す. $N = 0$ の場合に関しては, 命題 4.10 が命題 4.11 の Strong form となっている. よって $N > 0$ の場合を考える.

N の定義より少なくとも 1 つ special でない Seifert サーキット C が存在する. また $S^2 \setminus C$ の 2 つの領域を A_1, A_2 とする. ここで絡み目射影 P に関して新たに次の 2 つの絡み目射影 P_1, P_2 を構成する.

$$\begin{aligned}P_1 &= C \cup (P \cap A_1), \\ P_2 &= C \cup (P \cap A_2).\end{aligned}$$

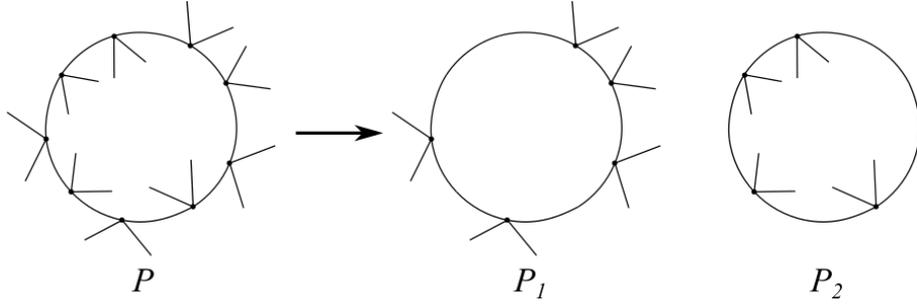


図 23: non-special Seifert サーキットから得られる P_1, P_2

これら P_1, P_2 は P と同様に交点を頂点とするグラフとみなせる (図 23). また集合として C と一致する P_1, P_2 の部分グラフをそれぞれ C_1, C_2 と表す. ここで P_i ($i = 1, 2$) の向き O_i, o_i を次のように定める: $P_i \setminus C_i$ においては自然に P の部分グラフとみなせるので向き O_i, o_i は P の向き O, o に従うとする. C_i の辺に関しては, その端点を向き O, o に関して終点とする C の辺を集合として含む場合, その点を終点とする向き O_i, o_i を定める.

これらの向きは, P_i の絡み目向きおよび交代的向きとみなせる. よって P_1, P_2 は交代的絡み目射影である. したがって各辺に重み α を定義することができ, P に関する H, K と同様に H_i, K_i を考えることができる.

また P_i の頂点, Seifert サーキット, non-special Seifert サーキットの数をそれぞれ d_i, f_i, N_i で表す. このとき明らかに

$$\begin{aligned} d_1 + d_2 &= d, \\ f_1 + f_2 &= f + 1, \\ N_1 + N_2 &= N - 1 \end{aligned}$$

が成り立つ.

C_i は special Seifert サーキットなので命題 4.9(ii) より $C_i \subset H_i$ または $C_i \subset K_i$ ($i = 1, 2$) のいずれかが成り立つ. よって以下の 4 つの可能性が存在する.

- (i) $C_1 \subset H_1, C_2 \subset K_2,$
- (ii) $C_1 \subset K_1, C_2 \subset H_2,$
- (iii) $C_1 \subset H_1, C_2 \subset H_2,$
- (iv) $C_1 \subset K_1, C_2 \subset K_2.$

しかし (iii), (iv) は不可能であることがわかる. 実際 $H_i \setminus C_i \subset H \setminus C, K_i \setminus C_i \subset K \setminus C$ ($i = 1, 2$) であることと命題 4.2 ($H_i(K_i)$ の任意の 2 辺は共通の終点を持

たない) より (iii) の場合 $C \subset H$ が成り立つ. よって $C \in \mathcal{C}(H, o) \subset \mathcal{F}_s$ が導かれるが, これは C は non-special という仮定に反する. ((iv) の場合も $C \subset K$ となり同様に矛盾を導ける.)

残る (i), (ii) はどちらも可能である. ここでは具体的に (i) が成り立つと仮定する. このとき $C \not\subset H, C \not\subset K, C_1 \subset H_1, C_2 \subset K_2$ より以下が成り立つ.

$$b_1(H_1) + b_1(H_2) = b_1(H) + 1,$$

$$b_1(K_1) + b_1(K_2) = b_1(K) + 1.$$

次に向き o に関して C_1 の頂点 v_1 を終点, C_2 の頂点 v_2 を始点とする C の辺 b を選ぶ. また v_2 を終点とする C の辺を a と表す (図 24).

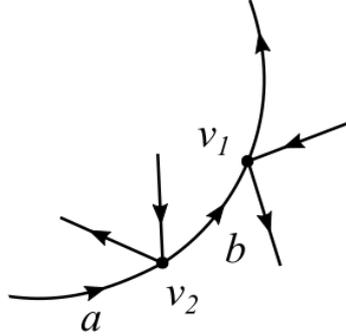


図 24: 頂点 v_1, v_2 および辺 a, b の位置関係

今, C は non-special である一方, C_i ($i = 1, 2$) は special なので $N_i < N$ が成り立つ. よって帰納法の仮定および命題 4.12 より P_i に関して命題 4.11 の Strong form が成り立つ. すなわち P_i の頂点 v_i を根とする (P_i, o_i) の全域木 $T(H_i), T(K_i)$ および非負整数 h_i, k_i が存在し以下が成り立つ.

$$(T(H_i) \cap H_i \text{ の辺の数}) \geq d_i - b_1(H_i) - h_i,$$

$$(T(K_i) \cap K_i \text{ の辺の数}) \geq d_i - b_1(K_i) - k_i,$$

$$h_i + k_i = N_i.$$

(後述するが, これら h_i, k_i に関して $h = h_1 + h_2, k = k_1 + k_2 + 1$ は命題 4.11 で求めたいものと一致している.)

ここで, さらに条件を付け加えた $T(H_1), T(K_2)$ の存在がいえる.

Claim. 向き o_i に関して v_i を終点とする C_i の辺を e_i で表す. このとき $T(H_1), T(K_2)$ は以下を満たすように選ぶことができる.

$$(*) \quad C_1 \setminus e_1 \subset T(H_1), \quad C_2 \setminus e_2 \subset T(H_2).$$

この証明は後に個別に与える.

以後 $(*)$ は常に成り立つとする. $T(H)$ を構成する. $T^1(H)$ を $T(H_1)$ から C_1 の全ての辺を除いたものとする. これは C_1 の頂点を根とする (P, o) の根付きの非交和とみなせる.

次に C_2 を C に細分することで, $T(H_2)$ を P の部分グラフとみなす. このときグラフ $T^2(H) = T(H_2) \cup (H \cap C)$ は v_2 を根とする (P, o) の根付き木である. (なぜなら $C_2 \subset K_2$ より C_2 の頂点を終点とする $P_2 \setminus C_2$ の辺は全て H に含まれる. よって C_2 の頂点を終点とする C の辺はすべて K に含まれる. したがって $T(H_2)$ に $C \cap H$ の辺を付け加えても, サイクルも共通の終点を持つ辺も現れない.) また $T(H_2)$ に含まれない C の頂点は C_1 の頂点であり, $C_1 \subset H_1$ であるので先程と同様の議論により $C \cap H$ の辺でその頂点を終点とするものが存在する. よって $T^2(H)$ は C の全ての頂点を含む.

以上の $T^1(H), T^2(H)$ を用いて $T(H)$ を以下のように構成する.

$$T(H) = T^1(H) \cup T^2(H).$$

これは v_2 を根とする (P, o) の全域木である. この $T(H)$ が H の辺の数に関して満たす条件を確かめていく.

p を C_1 の辺の数とする. このとき $T(H)$ は各部分グラフにおいて H の辺を次の数含む.

- (i) $T^1(H)$ 内に少なくとも $d_1 - b_1(H_1) - h_1 - (p - 1)$,
- (ii) $T(H_2)$ 内に少なくとも $d_2 - b_1(H_2) - h_2$,
- (iii) $C \cap H$ 内にちょうど p .

ここで $C_2 \subset K_2$ より $T(H_2) \cap H_2$ の辺は C_2 に含まれないので (i), (ii), (iii) において辺が重複して数え上げられることはない. よって $T(H)$ は H の辺を少なくとも $(d_1 + d_2) - (b_1(H_1) + b_1(H_2) - 1) - (h_1 + h_2)$ 個含む. よって以下を得る.

$$(T(H) \cap H \text{ の辺の数}) \geq d - b_1(H) - (h_1 + h_2).$$

$T(H)$ と同様に v_1 を根とする (P, o) の全域木を構成できる. (ここで v_1 とは C の辺 b の終点であった. また b の始点を v_1 , v_1 を終点とする C の辺を a とした.) これを $T'(K)$ と表す. $T'(K)$ は $T(H)$ と同様に以下を満たす.

$$(T'(K) \cap K \text{ の辺の数}) \geq d - b_1(K) - (k_1 + k_2).$$

ただし, 命題の証明のためには同じ頂点を根とする全域木を構成する必要があるので $T'(K)$ の根を $T(H)$ と同じ v_2 に移動したい. そのため v_1, v_2 および a, b の位置関係を利用する.

$T'(K)$ の構成の仕方より $a \in T'(K)$, $b \notin T'(K)$. よって

$$T(K) = (T'(K) \setminus a) \cup b$$

は v_2 を根とする (P, o) の全域木である. また $a \in K$, $b \in H$ より以下を得る.

$$T(K) \cap K \text{ の辺の数} \geq d - b_1(K) - (k_1 + k_2 + 1).$$

非負整数 h_1, h_2, k_1, k_2 に関して以下が成り立つ.

$$(h_1 + h_2) + (k_1 + k_2 + 1) = N_1 + N_2 + 1 = N.$$

よって, 前述したように $h = h_1 + h_2$, $k = k_1 + k_2 + 1$ とすれば $T(H), T(K), h, k$ は命題 4.11 を満たす.

$C_1 \subset K_1$, $C_2 \subset H_2$ の場合も同様. □

Claim の証明. $T(H_1)$ に関して示す. $T(H_1)$ に含まれない e_1 以外の C_1 の辺 e を 1 つ選ぶ. e の終点を v とする. また v を終点とする別の P_1 の辺を g と表す. $T(H_1)$ は根付き全域木であり, v を終点とする辺は他に存在しないので $g \in T(H_1)$.

ここで $T(H_1) \setminus g$ は 2 つの根付き木の非交和である. (一方の根は v_1 , もう一方は v .) よってグラフ $T^1(H_1) = (T(H_1) \setminus g) \cup e$ は v_1 を根とする (P_i, o_i) の根付き全域木である. また $T^1(H_1)$ は $T(H_1)$ より 1 つ多く H_1 の辺を含むので, 少なくとも H_1 の辺を $d_1 - b_1(H_1) - h_1$ 個含む ($e \in H_1$, $g \notin H_1$ のため).

これを繰り返すことで $T(H_1)$ に関する主張は示される. $T(K_2)$ についても同様. □

よって命題 4.11 が示された. また命題 4.12 で同値性を示した補題 4.1 が成り立つことも分かった. よって本論文の主題である定理 3.6 も従う.

定理 3.6 (再掲). L を成分数 μ の交代絡み目とする. このとき種数 $g(L)$ に関して以下が成り立つ.

$$\deg \Delta_L(t) = 2g(L) + \mu - 1.$$

5 応用

5.1 トーラス結び目の交代性・非交代性

本論文では交代絡み目が満たすべき条件について考えてきた。これを用いて、逆に絡み目の非交代性を示すことができる。本小節ではトーラス結び目が交代的であるための必要十分条件について考察する。まずトーラス結び目を定義する。

定義 5.1. トーラスのメリディアン, ロンジチュードの向きを (図 25) のように定める。

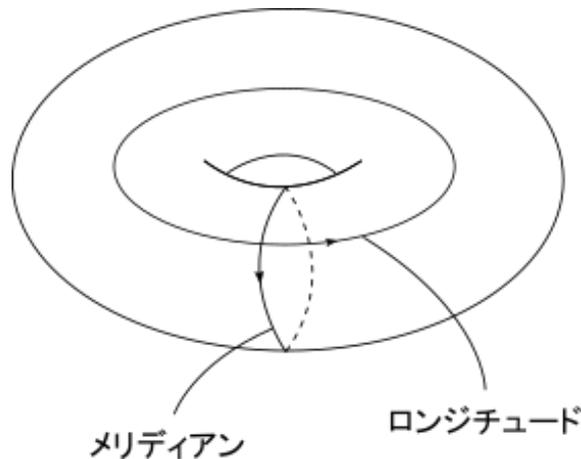


図 25: S^3 に標準的に埋め込まれたトーラスのメリディアン, ロンジチュード

S^3 に標準的に埋め込まれたトーラス T のメリディアンに代表される, $H_1(T^2; \mathbb{Z})$ でのホモロジー類を m , ロンジチュードに代表されるホモロジー類を l とする。このとき T 上の単純閉曲線のホモロジー類は $pm + ql$ (p, q は互いに素) と表せる。これを (p, q) 型トーラス結び目といい, $T(p, q)$ で表す。

トーラス結び目に関して以下の性質がよく知られている。

定理 5.2 ([4, 定理 2.2.2(ii)]). トーラス結び目 $T(p, q)$ と $T(p', q')$ が同値であるための必要十分条件は (p', q') が $(p, q), (q, p), (-p, -q), (-q, -p)$ のいずれかと等しいことである。

命題 5.3 ([4, 命題 6.1.16]). (p, q) 型トーラス結び目 $T(p, q)$ の結び目群は以下の表示を持つ。

$$\langle x, y \mid x^p y^{-q} \rangle.$$

この群表示から $T(p, q)$ の Alexander 多項式が得られる.

$$\Delta_{T(p,q)}(t) \doteq \frac{(1-t)(1-t^{pq})}{(1-t^p)(1-t^q)}.$$

絡み目群の一般の群表示から Alexander 多項式を求める方法に関しては [3, Section 11] を参照.

これを系 2.5 で与えた交代絡み目の満たすべき条件と照らし合わせることで以下がわかる.

定理 5.4. 非自明な (p, q) 型トーラス結び目が代数的であるための必要十分条件は p, q のいずれかが ± 2 と等しいことである.

証明. 十分性に関しては, $T(2, r)$ が以下の射影図を持つことと, 定理 5.2 から直ちにわかる (図 26).

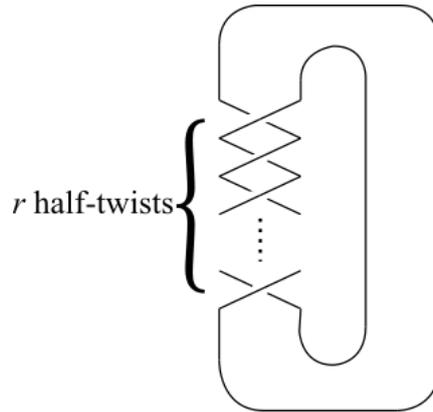


図 26: $T(2, r)$ の代数的射影 ($r < 0$ の場合は反対方向に $|r|$ half-twists)

必要性は背理法を用いて示す. 定理 5.2 より $p \geq 0, |p| < |q|$ としてよい. $T(p, q)$ は非代数的かつ $p \neq 2$ と仮定する. 今 \doteq は $\pm t^i$ 倍を法として等しいことを意味するので

$$\Delta_{T(p,q)}(t) \doteq \frac{(1-t)(1-t^{p|q|})}{(1-t^p)(1-t^{|q|})}$$

が成り立つ. ここで

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{(p-1)(|q|-1)} a_i t^i &= \frac{(1-t)(1-t^{p|q|})}{(1-t^p)(1-t^{|q|})} \\ &= \frac{1+t^p+t^{2p}+\dots+t^{p(|q|-1)}}{1+t+t^2+\dots+t^{|q|-1}} \end{aligned}$$

とおく. このとき, 等式

$$(1 + t + t^2 + \cdots + t^{|q|-1}) \sum_{i=0}^{(p-1)(|q|-1)} a_i t^i = 1 + t^p + t^{2p} + \cdots + t^{p(|q|-1)}$$

より, $1, t, t^{p-1}, t^p$ の係数を比較することで a_i は以下を満たすことがわかる.

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, & a_1 &= -1, \\ a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{p-1} &= 0, \\ a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{p-1} + a_p &= 1. \end{aligned}$$

よって $a_p = 1$ が成り立つ. したがって系 2.5 と合わせて $(-1)^{0+p} a_0 a_p \geq 0$, すなわち $(-1)^p \geq 0$ が成り立つ. よって p は偶数であることがわかる.

ここで $|q|$ に関して以下のように場合分けする.

((i) $|q| \equiv 1 \pmod{p}$ の場合) $|q| = np + 1$ ($n \in \mathbb{Z}_{>0}$) と表せる. このとき, 両辺の $t^{|q|}, t^{|q|+1}$ の係数比較により a_i に関して以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{|q|} &= 0, \\ a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{|q|+1} &= 0. \end{aligned}$$

(ここで, 第 2 式は $p \neq 2$ より得られる $|q| + 2 \not\equiv 1 \pmod{p}$ から従う.)

よって $a_1 = -1$ より $a_{|q|+1} = -1$ が成り立つ. しかし p : 偶数より $(-1)^{0+(|q|+1)} a_0 a_{|q|+1} = -1 < 0$ となり系 2.5 に反する.

((ii) $|q| \not\equiv 1 \pmod{p}$ の場合) このとき, 両辺の $t^{|q|-1}, t^{|q|}$ の係数比較により a_i に関して以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{|q|-1} &= 0, \\ a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{|q|} &= 0. \end{aligned}$$

よって $a_0 = 1$ より $a_{|q|} = 1$ が成り立つ. ここで系 2.5 より $(-1)^{0+|q|} a_0 a_{|q|} \geq 0$, すなわち $(-1)^{|q|} = 1$ を得る. しかし, このとき q は偶数となり p と互いに素でない.

よって, いずれの場合においても矛盾を導くことができた. □

注意. 非交代式的であるが, 等式

$$\deg \Delta_L(t) = 2g(L) + \mu - 1.$$

を満たす絡み目が存在する. 具体例として結び目 8_{19} が挙げられる (図 27). 実際, 結び目 8_{19} はトーラス結び目 $T(3, 4)$ であるため, 定理 5.4 より非交代的. また $\deg \Delta_{8_{19}}(t) = \deg(t^3 - t^2 + 1 - t^{-2} + t^{-3}) = 6$. よって定理 3.6 より $g(8_{19}) \geq 3$ が成り立つが, 図 28 のように種数 3 の Seifert 曲面が存在するため $g(8_{19}) = 3$. よって上の等式を満たす

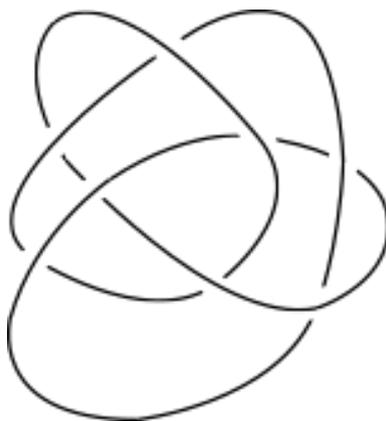


図 27: 結び目 8_{19} の射影図

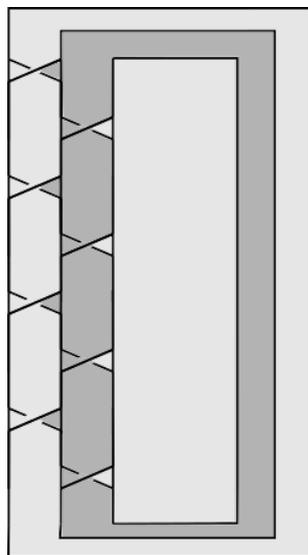


図 28: $T(3, 4)$ の Seifert 曲面

ここで図 28 の曲面の 1 次元ホモロジー群に関する基底は, 上下に隣接するバンドを横断するサイクルである.

A Alexander 多項式の幾何学的考察

本文において, Alexander 多項式は Fox 微分を用いて機械的に定義した. 本節では Alexander 多項式の定義において, Fox 微分の持つ幾何学的意味について考察したい. なお, 本節は [4] を参考にした.

L を成分数 r の絡み目とする. またその外部 $S^3 \setminus \text{Int}N(L)$ を E , 絡み目群を G とする. ここで Hurewicz 準同型 $\gamma: \pi_1(E) \rightarrow H_1(E; \mathbb{Z})$ の核 $[G, G]$ に対応する E の被覆空間を考える. この被覆空間のことを E の普遍 Abel 被覆空間といい, E_γ で表す. この被覆は Galois 被覆であるので, E_γ の被覆変換群は $G/[G, G] \simeq H_1(E; \mathbb{Z})$ と同一視できる. 以下, 扱うホモロジー群は全て整数係数であるので, \mathbb{Z} を省略し, 単に $H_1(E)$ と表す. ここで加群 $H_1(E_\gamma)$ への $H_1(E)$ の作用を拡張して, 群環 $\mathbb{Z}H_1(E)$ の作用を考えることができる. よって $H_1(E_\gamma)$ を $\mathbb{Z}H_1(E)$ 上の加群とみなすことができるが, $H_1(E)$ は絡み目の各成分に対応するメリディアンを表すホモロジー類 t_1, \dots, t_r を基底とする自由加群であったので, $\mathbb{Z}H_1(E)$ は r 変数 Laurent 多項式環 Λ^r と同一視できる. したがって $H_1(E_\gamma)$ は Λ^r 加群とみなせる. また e を E の任意の 1 点, $p: E_\gamma \rightarrow E$ を被覆写像とする. このとき相対ホモロジー群 $H_1(E_\gamma, p^{-1}(e))$ も同様に Λ^r 加群とみなせる.

定義 A.1. L を成分数 r の絡み目とする. このとき Λ^r 加群 $H_1(E_\gamma, p^{-1}(e))$ を L の Alexander 加群とよび, $A(L)$ で表す.

定義 A.2. M を可換環 R 上の加群とする. このとき有限階数 R 自由加群 E, F に対して完全系列

$$F \xrightarrow{\alpha} E \rightarrow M \rightarrow 0$$

が成り立つとき, α の表現行列 A を M の表現行列という.

定義 A.3. M を可換環 R 上の加群で $m \times n$ 表現行列 A を持つものとする. このとき M の r 次基本イデアル \mathcal{E}_r を A の $(m-r+1) \times (m-r+1)$ 小行列式全てにより生成される R のイデアルと定義する. ここで $r > m$ の場合, $\mathcal{E}_r = R$, $r \leq 0$ の場合, $\mathcal{E}_r = 0$ と定める.

加群 M の表現行列は, 完全系列の取り方により異なるものが取れる. しかし, 基本イデアルは表現行列の取り方によらないということがわかる. (証明は [3, Theorem 6.1] を参照).

L の絡み目群の Wirtinger 表示を $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid r_1, r_2, \dots, r_{n-1} \rangle$ とする. このとき 0セル e を基点とする 1セル $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ のブーケをとる, また関係子 r_i にしたがって 2セル r_i^* を接着する. このようにして構成される 2次元セル複体を W と表す. このとき $\pi_1(W, e)$ は G と同一視できる.

ここで W の $[\pi_1(W), \pi_1(W)]$ に対応する被覆を $f_p: W_\gamma \rightarrow W$ とする. このとき自然な同型により, $H_1(W_\gamma) \simeq H_1(E_\gamma), H_1(W_\gamma, f_p^{-1}(e)) \simeq A(L)$ を得る. よってチェイン複体 $C_\#(W_\gamma)$ の構造を観察していく.

まず e の W_γ への持ち上げ \hat{e} を 1つ指定する. そして $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, r_1^*, r_2^*, \dots, r_{n-1}^*$ の \hat{e} を基点とする W_γ への持ち上げを $\hat{x}_1^*, \hat{x}_2^*, \dots, \hat{x}_n^*, \hat{r}_1^*, \hat{r}_2^*, \dots, \hat{r}_{n-1}^*$ とする. このとき, チェイン複体

$$C_2(W_\gamma) \xrightarrow{\partial_2} C_1(W_\gamma) \xrightarrow{\partial_1} C_0(W_\gamma) \rightarrow 0$$

に関して $C_2(W_\gamma) = \Lambda[\hat{r}_1^*, \hat{r}_2^*, \dots, \hat{r}_{n-1}^*], C_1(W_\gamma) = \Lambda[\hat{x}_1^*, \hat{x}_2^*, \dots, \hat{x}_n^*], C_0(W_\gamma) = \Lambda[\hat{e}]$ が得られる.

ここで $\partial_2(\hat{r}_i^*)$ を計算する場合, $r_i = x_{i(1)}x_{i(2)}x_{i(3)}\cdots$ が表すループの \hat{e} を基点とする持ち上げを求めればよい. この持ち上げは以下のルールに従う. u_1, u_2 を W 内のループとする. また, これらの \hat{e} を基点とする W_γ への持ち上げを \hat{u}_1, \hat{u}_2 とする. このとき, u_1u_2 の \hat{e} を基点とする持ち上げ $\widehat{u_1u_2}$ は次のようになる.

$$\widehat{u_1u_2} = \hat{u}_1 + \gamma(u_1)\hat{u}_2.$$

また, ループ u^{-1} の \hat{e} を基点とする W_γ への持ち上げ $\widehat{u^{-1}}$ は次のようになる.

$$\widehat{u^{-1}} = -\gamma(u^{-1})\hat{u}.$$

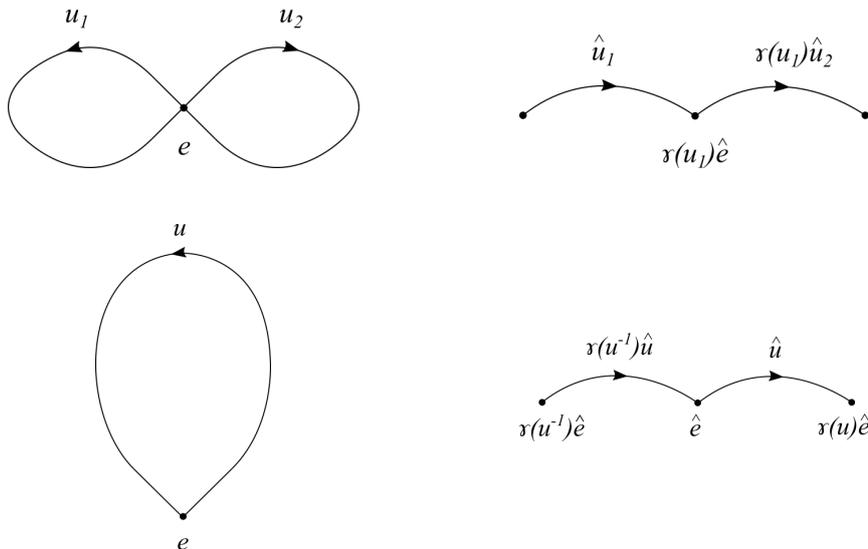


図 29: 持ち上げのイメージ

よって Fox の自由微分の定義との比較により, ∂_2 の表現行列は $\left(\gamma \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)\right)$ ($i = 1, \dots, n-1, j = 1, \dots, n$) と表される.

一方, チェイン複体

$$C_2(W_\gamma) \xrightarrow{\partial_2} C_1(W_\gamma) \xrightarrow{\partial_1} C_0(W_\gamma) \rightarrow 0$$

に関して, $C_2(f_p^{-1}(e)) = C_1(f_p^{-1}(e)) = 0$ より, $C_i(W_\gamma, f_p^{-1}(e)) \simeq C_i(W_\gamma)$ ($i = 1, 2$) が成り立つ. よって, $Z_1(W_\gamma, f_p^{-1}(e)) = C_1(W_\gamma, f_p^{-1}(e)) \simeq C_1(W_\gamma)$, $B_1(W_\gamma, f_p^{-1}(e)) \simeq B_1(W_\gamma) = \text{Im } \partial_2$ より $A(L) \simeq \text{Coker } \partial_2$ が成り立つ.

以上のことをまとめると, 次の可換図式が成り立つ.

$$\begin{array}{ccccccc} C_2(W_\gamma) & \xrightarrow{\partial_2} & C_1(W_\gamma) & \longrightarrow & \text{Coker } \partial_2 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \simeq & \circlearrowleft & \downarrow \simeq & \circlearrowleft & \downarrow \simeq & & \\ C_2(W_\gamma, f_p^{-1}(e)) & \xrightarrow{\bar{\partial}_2} & C_1(W_\gamma, f_p^{-1}(e)) & \longrightarrow & \text{Coker } \bar{\partial}_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \\ & & Z_1(W_\gamma, f_p^{-1}(e)) & & H_1(W_\gamma, f_p^{-1}(e)) & & \end{array}$$

ここで, 2つの横の系列は完全である.

よって完全列

$$C_2(W_\gamma) \xrightarrow{\partial_2} C_1(W_\gamma) \rightarrow A(L) \rightarrow 0$$

が得られ, 行列 $\left(\gamma \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)\right)$ が $A(L)$ の表現行列の1つであることがわかる.

ここで $A(L)$ の1次基本イデアル \mathcal{E}_1 に関して, 含まれる全ての元の最大公約元を Alexander 多項式と定義する. これは基本イデアルが加群に関する不変量であることから絡み目不変量であるとわかる. ただし, これは r 変数多項式であり, $r \neq 1$ の場合, 本文で定義した Alexander 多項式と一致しない. 同様の定義を得るには, Hurewicz 準同型 γ の代わりに準同型 $\nu: H_1(E) \rightarrow \langle t \rangle$, $t_i \mapsto t$ との合成準同型 $\nu \circ \gamma: \pi_1(E) \rightarrow \langle t \rangle$ を考え, その核に対応する E の Abel 被覆 $E_{\nu \circ \gamma}$ を用いる必要がある (このようにして得られる Alexander 多項式を一般に, 簡約 Alexander 多項式という).

参考文献

- [1] R.H. Crowell, Genus of alternating link types, *Ann. of Math.* (2), **69** (1959), pp. 258–275.

- [2] K. Murasugi, On the genus of the alternating knot, I, II, *J. Math. Soc. Japan* **10** (1958), pp. 94–105, 235–248.
- [3] W.B. Raymond Lickorish, *An introduction to knot theory*, Graduate Texts in Mathematics **175**, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [4] 河内 明夫 編著, 結び目理論, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1990.